

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

EDUARDO HENRIQUE VIECILLI MARTINS DE MELLO

ANÁLISE ESTÁTICA E DINÂMICA DE VIGAS
DE EULER-BERNOULLI SOBRE BASE ELÁSTICA COM
O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO
E O MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS

CURITIBA

2017

EDUARDO HENRIQUE VIECILLI MARTINS DE MELLO

ANÁLISE ESTÁTICA E DINÂMICA DE VIGAS
DE EULER-BERNOULLI SOBRE BASE ELÁSTICA COM
O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO
E O MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, Setor de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Métodos Numéricos em Engenharia, Área de Concentração: Mecânica Computacional.

Orientador: Prof. José Antonio Marques
Carrer

Coorientador: Prof. Raphael Fernando
Scuciato

CURITIBA

2017

M527a

Mello, Eduardo Henrique Viecilli Martins de

Análise estática e dinâmica de vigas de Euler-Bernoulli sobre base elástica com o método dos elementos de contorno e o método das diferenças finitas [recurso eletrônico] / Eduardo Henrique Viecilli Martins de Mello, 2017.

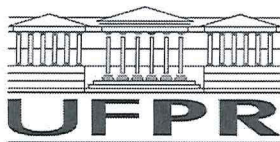
Dissertação (mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, Setor de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná.

Orientador: José Antonio Marques Carrer

Coorientador: Raphael Fernando Scuciato

1. Vigas. 2. Método de elementos de contorno. 3. Método de diferença finita. I. Universidade Federal do Paraná. II. Carrer, José Antonio Marques. III. Scuciato, Raphael Fernando. IV. Título

CDD 624.177



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
Setor CIÊNCIAS EXATAS
Programa de Pós-Graduação MÉTODOS NUMÉRICOS EM ENGENHARIA

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em MÉTODOS NUMÉRICOS EM ENGENHARIA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de **EDUARDO HENRIQUE VIECILLI MARTINS DE MELLO** intitulada: **ANÁLISE ESTÁTICA E DINÂMICA DE VIGAS DE EULER-BERNOULLI SOBRE BASE ELÁSTICA COM O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO E O MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS**, após terem inquirido o aluno e realizado a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de mestre está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

Curitiba, 18 de Agosto de 2017.

JOSE ANTONIO MARQUES CARRER
Presidente da Banca Examinadora (UFPR)

LUIZ ALKIMIN DE LACERDA
Avaliador Interno (UFPR)

MARCOS ARNDT
Avaliador Interno (UFPR)

WEBÉ JOÃO MANSUR
Avaliador Externo (UFRJ)

Para Alcilene, minha querida mãe.

AGRADECIMENTOS

À minha mãe, Alcilene, pelo suporte e confiança desde sempre.

Aos meus avós, Abelina e Arcísio, pelo carinho e compreensão da minha ausência.

Aos mestres, Prof. Carrer e Prof. Raphael, pelos muitos conhecimentos transmitidos.

Aos professores e colegas do PPGMNE, que também contribuíram para este trabalho.

Aos amigos, pelo apoio e pelos momentos de descontração.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes), pelo auxílio financeiro.

O fim é só um novo começo.

RESUMO

Este trabalho resolve numericamente a equação de vigas sobre base elástica, para carregamentos estáticos e dinâmicos. A equação é originada da teoria de vigas de Euler-Bernoulli. Duas formulações do Método dos Elementos de Contorno são desenvolvidas para a solução do problema: uma para o caso estático, outra para o dinâmico. Nelas, emprega-se a solução fundamental do problema estático. Seus resultados são comparados com a solução analítica, para o caso estático, e com o Método das Diferenças Finitas, para o caso estático e o dinâmico. As formulações numéricas são desenvolvidas para quatro tipos comuns de vigas: biapoiada, biengastada, engastada-apoiada, engastada-livre. As propriedades de geometria e de material são mantidas constantes para todas as formulações. São calculados deslocamentos, rotações, momentos fletores e esforços cortantes para vigas sujeitas à cargas concentradas e distribuídas.

Palavras-chave: Euler-Bernoulli. Vigas em base elástica. Método dos Elementos de Contorno. Método das Diferenças Finitas.

ABSTRACT

This work is concerned with the numerical solution of beams on elastic foundation, for statics and dynamics loads. The equation is based on the Euler-Bernoulli beam theory. Boundary Element Method formulations, which employs the static fundamental solution, are developed for the solution of the problem: one for statics loads and other for dynamics ones. Their results are compared with the analytical solution, for the static case, and the Finite Difference Method, for the static and dynamic cases. Numerical formulations are developed for the four common types of beams: pinned-pinned, fixed-fixed, fixed-pinned, fixed-free. Geometric and material properties are assumed as constants. Displacements, rotations, bending moments and shear forces are computed for beams under concentrated and distributed loads.

Keywords: Euler-Bernoulli. Beams on Elastic Foundation. Boundary Element Method. Finite Difference Method.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 – FIGURA ESQUEMÁTICA DA VIGA	19
FIGURA 2 – GRÁFICO GENÉRICO DA ACELERAÇÃO EM UM DADO INSTANTE DE TEMPO $t = j\Delta t$ PARA PONTOS PERTENCENTES À DISCRETIZAÇÃO DA VIGA.	45
FIGURA 3 – GRÁFICO GENÉRICO DA ACELERAÇÃO EM UM DADO INSTANTE DE TEMPO $t = j\Delta t$ COM APROXIMAÇÃO LINEAR ENTRE OS PONTOS PERTENCENTES À DISCRETIZAÇÃO DA VIGA	46
FIGURA 4 – ESQUEMA CONSIDERADO PARA A APROXIMAÇÃO LINEAR DA ACELERAÇÃO PARA CADA CÉLULA.	47
FIGURA 5 – REPRESENTAÇÃO DO CARREGAMENTO GRADUAL	61
FIGURA 6 – REPRESENTAÇÃO DO CARREGAMENTO INSTANTÂNEO.	62
FIGURA 7 – RESULTADOS PARA VIGA AA COM CARGA CONCENTRADA - CARREGAMENTO ESTÁTICO	64
FIGURA 8 – RESULTADOS PARA VIGA AA COM CARGA DISTRIBUÍDA - CARREGAMENTO ESTÁTICO	64
FIGURA 9 – RESULTADOS PARA VIGA EE COM CARGA CONCENTRADA - CARREGAMENTO ESTÁTICO	65
FIGURA 10 – RESULTADOS PARA VIGA EE COM CARGA DISTRIBUÍDA - CARREGAMENTO ESTÁTICO.	65
FIGURA 11 – RESULTADOS PARA VIGA EA COM CARGA CONCENTRADA - CARREGAMENTO ESTÁTICO.	66
FIGURA 12 – RESULTADOS PARA VIGA EA COM CARGA DISTRIBUÍDA - CARREGAMENTO ESTÁTICO.	66
FIGURA 13 – RESULTADOS PARA VIGA EL COM CARGA CONCENTRADA - CARREGAMENTO ESTÁTICO.	67
FIGURA 14 – RESULTADOS PARA VIGA EL COM CARGA DISTRIBUÍDA - CARREGAMENTO ESTÁTICO.	67
FIGURA 15 – RESULTADOS PARA VIGA AA COM CARGA CONCENTRADA - CARREGAMENTO TOTAL EM 50 MILISEGUNDOS	68
FIGURA 16 – RESULTADOS PARA VIGA EE COM CARGA CONCENTRADA - CARREGAMENTO TOTAL EM 50 MILISEGUNDOS	69
FIGURA 17 – RESULTADOS PARA VIGA EA COM CARGA CONCENTRADA - CARREGAMENTO TOTAL EM 50 MILISEGUNDOS	70
FIGURA 18 – RESULTADOS PARA VIGA EL COM CARGA CONCENTRADA - CARREGAMENTO TOTAL EM 50 MILISEGUNDOS	71

FIGURA 19 – RESULTADOS PARA VIGA AA COM CARGA DISTRIBUÍDA - CARREGAMENTO TOTAL EM 50 MILISEGUNDOS	72
FIGURA 20 – RESULTADOS PARA VIGA EE COM CARGA DISTRIBUÍDA - CARREGAMENTO TOTAL EM 50 MILISEGUNDOS	73
FIGURA 21 – RESULTADOS PARA VIGA EA COM CARGA DISTRIBUÍDA - CARREGAMENTO TOTAL EM 50 MILISEGUNDOS	74
FIGURA 22 – RESULTADOS PARA VIGA EL COM CARGA DISTRIBUÍDA - CARREGAMENTO TOTAL EM 50 MILISEGUNDOS	75
FIGURA 23 – RESULTADOS PARA VIGA AA COM CARGA CONCENTRADA - CARREGAMENTO INSTANTÂNEO	76
FIGURA 24 – RESULTADOS PARA VIGA EE COM CARGA CONCENTRADA - CARREGAMENTO INSTANTÂNEO	77
FIGURA 25 – RESULTADOS PARA VIGA EA COM CARGA CONCENTRADA - CARREGAMENTO INSTANTÂNEO	78
FIGURA 26 – RESULTADOS PARA VIGA EL COM CARGA CONCENTRADA - CARREGAMENTO INSTANTÂNEO	79
FIGURA 27 – RESULTADOS PARA VIGA AA COM CARGA DISTRIBUÍDA - CARREGAMENTO INSTANTÂNEO	80
FIGURA 28 – RESULTADOS PARA VIGA EE COM CARGA DISTRIBUÍDA - CARREGAMENTO INSTANTÂNEO	81
FIGURA 29 – RESULTADOS PARA VIGA EA COM CARGA DISTRIBUÍDA - CARREGAMENTO INSTANTÂNEO	82
FIGURA 30 – RESULTADOS PARA VIGA EL COM CARGA DISTRIBUÍDA - CARREGAMENTO INSTANTÂNEO	83

LISTA DE TABELAS

TABELA 1 – APROXIMAÇÕES CENTRAIS DO MDF PARA DERIVADAS DE PRIMEIRA ATÉ QUARTA ORDEM	25
TABELA 2 – APROXIMAÇÕES PROGRESSIVAS DO MDF PARA DERIVADAS DE PRIMEIRA ATÉ TERCEIRA ORDEM	25
TABELA 3 – APROXIMAÇÕES REGRESSIVAS DO MDF PARA DERIVADAS DE PRIMEIRA ATÉ TERCEIRA ORDEM	25
TABELA 4 – COEFICIENTES DE \bar{A} PARA A EXTREMIDADE ESQUERDA	29
TABELA 5 – COEFICIENTES DE \bar{A} PARA A EXTREMIDADE DIREITA	29
TABELA 6 – CÁLCULO DAS ROTAÇÕES COM O MDF	29
TABELA 7 – CÁLCULO DOS MOMENTOS FLETORES COM O MDF	30
TABELA 8 – CÁLCULO DOS ESFORÇOS CORTANTES COM O MDF	30
TABELA 9 – RESÍDUOS DE CONTORNO	34
TABELA 10 – FUNÇÕES DE PONDERAÇÃO DOS RESÍDUOS DE CONTORNO . . .	36
TABELA 11 – PROPRIEDADES DO MATERIAL E DA GEOMETRIA DAS VIGAS ANALISADAS	59
TABELA 12 – COMPRIMENTO DAS VIGAS ANALISADAS	59
TABELA 13 – VALOR FINAL DA CARGA E LOCAL DE APLICAÇÃO NAS VIGAS ANALISADAS	59

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.	13
1.1	CONSIDERAÇÕES INICIAIS	13
1.2	REVISÃO DA LITERATURA	13
1.3	OBJETIVOS	15
1.4	ORGANIZAÇÃO DO TEXTO	16
2	VIGAS DE EULER-BERNOULLI	18
2.1	EQUAÇÃO GOVERNANTE.	18
2.2	SOLUÇÕES ANALÍTICAS.	20
2.3	SOLUÇÃO FUNDAMENTAL	23
3	MÉTODOS NUMÉRICOS	24
3.1	MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS	24
3.1.1	Formulação para o caso estático	26
3.1.2	Formulação para o caso dinâmico	30
3.2	MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO - ESTÁTICO	34
3.2.1	Resíduos ponderados.	34
3.2.2	Formulação integral estática	38
3.3	MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO - DINÂMICO	42
3.3.1	Resíduos ponderados.	42
3.3.2	Aproximação temporal da aceleração	44
3.3.3	Aproximação espacial da aceleração	46
3.3.4	Formulação integral dinâmica.	50
4	EXEMPLOS NUMÉRICOS	58
4.1	ORGANIZAÇÃO E APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS	58
4.1.1	Resultados para carregamento estático	59
4.1.2	Resultados para carregamento gradual.	60
4.1.3	Resultados para carregamento instantâneo	62
4.2	ANÁLISE DOS RESULTADOS.	84
4.2.1	Resultados para carregamento estático	84
4.2.2	Resultados para carregamento gradual.	85
4.2.3	Resultados para carregamento instantâneo	88
5	CONCLUSÃO.	90
5.1	REVISÃO DOS ASSUNTOS ABORDADOS.	90
5.2	CONCLUSÕES E CONTRIBUIÇÕES DO PRESENTE TRABALHO	91

5.3	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.	92
5.4	CONSIDERAÇÕES FINAIS	93
	REFERÊNCIAS	94
	APÊNDICES.	96

1 INTRODUÇÃO

1.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

As vigas são elementos estruturais presentes em várias áreas da engenharia. Na Engenharia Civil, são partes integrantes da estrutura de pontes, edifícios e residências, por exemplo. Quando a viga é suportada de forma contínua, é possível modelar seu comportamento como viga sobre base elástica.

Equações diferenciais são utilizadas para descrever muitos fenômenos da engenharia, sendo vigas sobre base elástica um deles. Porém, soluções analíticas para equações diferenciais podem ser trabalhosas, difíceis de serem obtidas ou desconhecidas/inexistentes. Felizmente, existem métodos numéricos capazes de resolver, de forma aproximada, estas equações. Resultados satisfatórios dependem do tipo do método escolhido, do nível de discretização empregada e da precisão pretendida. Dentre os métodos mais conhecidos, é possível citar o Método das Diferenças Finitas, o Método dos Elementos Finitos, o Método dos Elementos de Contorno e o Método dos Volumes Finitos.

Este trabalho resolve numericamente a equação da teoria de Euler-Bernoulli para vigas sobre base elástica. São desenvolvidas as formulações estática e dinâmica para vigas sobre base elástica, para carregamentos concentrados e distribuídos.

1.2 REVISÃO DA LITERATURA

A teoria de vigas de Euler-Bernoulli, também conhecida como teoria clássica de vigas, apresenta equações para deslocamentos, rotações, momentos fletores e esforços cortantes para

pontos quaisquer de uma viga sujeita a um carregamento qualquer. A formulação estática desta teoria pode ser encontrada em Beer *et al.* [1] e Hibbeler [2]. Já a formulação dinâmica pode ser encontrada em Rao [3] e Graff [4].

As vigas de Euler-Bernoulli podem estar apoiadas sobre base elástica, originando assim a formulação de vigas sobre base elástica. A equação diferencial para vigas sobre base elástica pode ser encontrada em Hetényi [5] e em Brebbia, Telles e Wrobel [6], para o caso estático, e em Graff [4], para o caso dinâmico. Esta formulação é mostrada com mais detalhes no capítulo seguinte.

O Método das Diferenças Finitas, MDF, é um dos métodos numéricos mais simples para a solução de equações diferenciais. Assim como em outros métodos numéricos, o MDF discretiza o domínio e calcula o valor da função incógnita somente em pontos específicos. A base do MDF é trocar derivadas (totais ou parciais) por quocientes aproximados, que são obtidos a partir de expansões de séries de Taylor truncadas. Detalhes da obtenção dessa formulação podem ser encontrados, por exemplo, em Cunha [7] e Fornberg [8], para equações diferenciais ordinárias, e em Smith [9], para equações diferenciais parciais. A qualidade dos resultados depende diretamente de quão bem discretizado foi o domínio. Uma aplicação do MDF para vigas sem base elástica, com cargas estáticas e dinâmicas, pode ser vista em Mello [10], onde também podem ser encontrados mais detalhes sobre o MDF.

O Método dos Elementos de Contorno é um método que, a princípio, requer somente discretização do contorno do problema. As incógnitas do contorno são calculadas e, depois, os resultados para qualquer ponto do domínio são calculados como pós-processamento. Esse tipo de abordagem diminui o custo computacional e acelera a obtenção dos resultados (Brebbia e Dominguez [11]).

A solução de equações diferenciais com o Método dos Elementos de Contorno para problemas estáticos, MEC, de uma maneira geral, pode ser encontrada em Brebbia, Telles e Wrobel [6] e Brebbia e Dominguez [11]. Para casos dinâmicos, o tempo também é uma variável independente e existem algumas formulações propostas, como: a do MEC-DT, que é a do Método dos Elementos de Contorno que utiliza solução fundamental dependente do tempo; e a do MEC-D, que é a Método dos Elementos de Contorno que, ao utilizar solução

fundamental do problema estático, contém as integrais de domínio envolvendo as derivadas temporais.

A formulação MEC-DT é a formulação do Método dos Elementos de Contorno que utiliza soluções fundamentais dependentes do tempo, o que resulta num procedimento que requer a integração no tempo e no espaço, mas sempre no contorno do problema. Conforme Carrer, Mansur e Vanzuit [12], do ponto de vista matemático, a formulação MEC-DT é elegante e possui boa representação da causalidade. Porém, as integrais de convolução que aparecem na formulação exigem um alto custo computacional para seu cálculo. Scuciato [13] utilizou esta formulação para a análise dinâmica de vigas de Euler-Bernoulli.

A formulação MEC-D, por utilizar a solução fundamental do caso estático, não elimina as integrais de domínio envolvendo as derivadas temporais. Essas integrais são calculadas aproximadamente e exigem uma discretização de domínio. As derivadas temporais também precisam de uma aproximação, que pode ser feita com o Método de Houbolt (Houbolt [14]). O trabalho de Carrer *et al.* [15], que trata de vigas de Timoshenko, é um exemplo de utilização da formulação MEC-D com a aceleração aproximada pelo Método de Houbolt.

1.3 OBJETIVOS

Este trabalho busca desenvolver uma formulação do Método dos Elementos de Contorno para vigas sobre base elástica, tanto para carregamentos estáticos quanto para carregamentos dinâmicos. Para carregamentos estáticos, a formulação desenvolvida é a tradicional, sendo denominada simplesmente de MEC. Para carregamentos dinâmicos, a formulação escolhida é a MEC-D.

Estas formulações fornecem o deslocamento, a rotação, momento fletor e esforço cortante ao longo da viga. Estas quatro grandezas, e em especial as duas últimas, são de interesse para o dimensionamento estrutural de vigas.

Para a obtenção destas quatro grandezas, é necessária uma implementação computacional que, neste trabalho, é desenvolvida na linguagem Fortran. Como consequência natural,

a validação da formulação, e da implementação em si, vem para completar os objetivos do trabalho.

Para carregamentos estáticos, há solução analítica para validar os resultados, mas para carregamentos dinâmicos, não. Assim, outro método numérico, o Método das Diferenças Finitas, MDF, aparece para comparar os resultados obtidos com o Método dos Elementos de Contorno. Para o MDF, são desenvolvidas as mesmas etapas do MEC e do MEC-D, ou seja: desenvolver uma formulação, implementar computacionalmente e validar as duas etapas anteriores.

Pretende-se analisar quatro tipos comuns de vigas: a biapoiada, ou apoiada-apoiada; a biengastada, ou engastada-engastada; a engastada-apoiada; e a engastada-livre. Para todas as formulações, as condições de contorno prescritas (deslocamento, a rotação, momento fletor ou esforço cortante) são sempre nulas. Para o caso dinâmico, as formulações são desenvolvidas com a viga sempre partindo do repouso, ou seja, deslocamento e velocidade iniciais sempre nulos.

1.4 ORGANIZAÇÃO DO TEXTO

O fim desta introdução busca explicar como o trabalho foi estruturado.

Na literatura existem soluções analíticas para alguns casos estudados neste trabalho. O Capítulo 2 apresenta uma maneira genérica de como elas são obtidas, enquanto a particularização para cada condição de contorno estudada foi feita no primeiro dos Apêndices. Por ser decorrente de uma carga peculiar e ser de grande importância para o trabalho, a solução fundamental para o caso estático é apresentada no final do segundo Capítulo.

O Capítulo 3 é o que apresenta as etapas para o desenvolvimento das formulações numéricas. Como não se conhece uma solução analítica para o caso dinâmico, outro método numérico foi implementado, para servir de comparação com a solução obtida com o Método dos Elementos de Contorno. O método escolhido foi o Método das Diferenças Finitas, MDF, que aborda a equação de uma maneira mais simples, sendo, por isso, apresentado no começo

do Capítulo. São obtidas as formulações para o caso dinâmico e também para o caso estático. O desenvolvimento das formulações do Método dos Elementos de Contorno, MEC e MEC-D, é apresentado na sequência. As condições de contorno e condições iniciais sempre nulas, citadas anteriormente, são consideradas para o desenvolvimento das formulações.

A aplicação das formulações numéricas obtidas se dá no Capítulo 4. Primeiramente são apresentados os parâmetros usados para cada análise, seguidos dos gráficos com os resultados. Os resultados obtidos são analisados no final do Capítulo.

O desfecho do trabalho acontece no último Capítulo, o quinto. Nele são retomados os assuntos percorridos por este trabalho e apresentadas as conclusões e contribuições geradas. Com o que foi desenvolvido, outros trabalhos podem ser subsidiados e, para suscitar a inspiração, algumas ideias são apresentadas. A última seção do Capítulo traz as considerações finais.

No decorrer do texto foram citados trabalhos que basearam o estudo desenvolvido. Assim, eles são apresentados na Bibliografia.

Os Apêndices contêm itens importantes para o trabalho, mas que poderiam dificultar a leitura se estivessem dentro dos Capítulos anteriores. Como citado, o primeiro Apêndice traz as soluções analíticas particularizadas para os casos estudados. Os quatro seguintes estão relacionados com o Método dos Elementos de Contorno: o segundo apresenta as derivadas da solução fundamental, enquanto os restantes apresentam soluções de integrais que envolvem a solução fundamental. O último Apêndice trata dos códigos computacionais implementados.

2 VIGAS DE EULER-BERNOULLI

2.1 EQUAÇÃO GOVERNANTE

É de interesse calcular as deflexões de uma viga causadas por um carregamento externo. A teoria clássica para este cálculo é a de Euler-Bernoulli, cuja hipótese básica é a de que as seções transversais inicialmente planas e perpendiculares ao eixo da viga, continuam planas e perpendiculares ao eixo da viga após a deformação, como pode ser visto em Graff [4], junto com as demais hipóteses.

A hipótese básica da teoria é também uma de suas limitações. Dizer que as seções continuam planas após a deformação significa dizer que a viga é infinitamente rígida à deformação por esforços cisalhantes ou, de maneira equivalente, que a deformação decorrente destes esforços é negligenciada (Graff [4]). Assim, o responsável principal pelas deformações é o momento fletor gerado pelo carregamento.

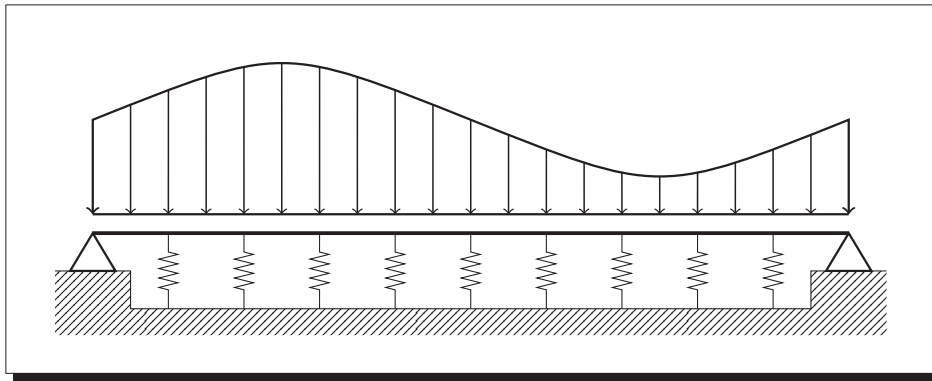
A equação de Euler-Bernoulli para vigas uniformes em base elástica é dada por

$$\frac{d^4 u}{dx^4} + \frac{\kappa u}{EI} = \frac{q(x)}{EI}, \quad (1)$$

onde: x é a coordenada espacial, em metro, m; $u = u(x)$ é o deslocamento transversal, em m; $q = q(x)$ é o carregamento externo, em Newton por metro, N/m; κ é a constante de mola associada à base elástica, em Newton por metro quadrado, N/m²; E é o módulo de elasticidade longitudinal, em N/m²; e I é a inércia da seção transversal da viga, em m⁴. Outras unidades podem ser utilizadas, desde que sejam compatíveis. Afirmar que a equação (1) é para vigas uniformes significa dizer que o módulo de elasticidade e a inércia da seção transversal são sempre constantes. Neste trabalho, a coordenada espacial varia sempre de $x = 0$, na extremidade esquerda, até $x = L$, na extremidade direita, o que significa dizer que o comprimento total da viga é sempre L .

Uma viga em base elástica pode ser representada, esquematicamente, como apresentado na Figura 1. Nela, estão representados: os vínculos, localizados nas extremidades; a carga, representada de cima para baixo, em toda a extensão da viga; a base elástica, representada pelas molas na parte inferior; e a própria viga.

FIGURA 1 – FIGURA ESQUEMÁTICA DA VIGA



FONTE: O autor (2017).

A rotação e os esforços internos, para vigas uniformes, podem ser escritos como

$$\theta = \frac{du}{dx}, \quad M = -EI \frac{d^2u}{dx^2} \text{ e } Q = -EI \frac{d^3u}{dx^3}, \quad (2)$$

onde $\theta = \theta(x)$ é a rotação da seção transversal, $M = M(x)$ é o momento fletor e $Q = Q(x)$ é o esforço cortante.

Para os casos dinâmicos, a equação da teoria de Euler-Bernoulli para vigas uniformes em base elástica é dada por

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\kappa u}{EI} + \frac{\rho A}{EI} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{q(x, t)}{EI}, \quad (3)$$

onde ρ é a massa específica que compõe a viga, em quilograma por metro cúbico, kg/m^3 ; A é a área da seção transversal da viga, em m^2 ; e t é o tempo, medido em segundos, s . Na equação (3), a derivada temporal de ordem dois representa o efeito da aceleração. O deslocamento e a carga, antes dependentes só da coordenada x , passam a ser função também do tempo, t .

As hipóteses admitidas para a obtenção da equação (1) são também admitidas para a obtenção de (3). Além delas, o efeito da inércia rotacional é negligenciado na equação para

o caso dinâmico (Graff [4]).

Para o caso dinâmico, a rotação e os esforços internos podem ser calculados como apresentado nas relações de (2). Mas, agora, os valores passam a ser dependentes também do tempo, ou seja, $\theta = \theta(x, t)$; $M = M(x, t)$; e $Q = Q(x, t)$.

Dependendo do carregamento aplicado, parte da viga tende a se separar da fundação. A teoria apresentada não fornece meios simples de retirar o efeito da base elástica nestes trechos (Bowles [16]). Ou seja, esforços de tração surgem na base elástica na parte da viga que tende a se separar.

Como considera somente a deflexão dos pontos imediatamente abaixo da viga, esta formulação também implica numa falta de continuidade da fundação. Deslocamentos ou tensões em outros pontos da fundação, próximos mas não abaixo da viga, não são levados em consideração (Hetényi [5]).

Apesar disso, essa teoria pode ser aplicada para vários problemas de engenharia. Por exemplo, em fundações ou trilhos de trem, onde é fácil identificar a viga e a base elástica. Se aplica, também, para casos em que o conceito de viga e fundação é mais abstrato, como tubos de paredes delgadas, cascas e domos, nos quais a base elástica está adjacente à estes elementos (Hetényi [5]).

2.2 SOLUÇÕES ANALÍTICAS

Hetényi [5] apresenta algumas maneiras para se obter a solução analítica para o caso estático. Uma delas considera que são conhecidos $u(0)$, $\theta(0)$, $M(0)$ e $Q(0)$ e a viga está sujeita a: um momento concentrado, M_a , em $x = x_M$; um carregamento concentrado, P , em $x = x_P$; e um carregamento distribuído, q , aplicado de $x = x_{q,i}$ até $x = x_{q,f}$.

Para os pontos com $x \neq 0$, pode-se calcular: o deslocamento, u , mostrado em (4); a rotação, θ , em (5); o momento fletor, M , em (6); e o esforço cortante, Q , mostrado em (7).

$$\begin{aligned}
u(x) = & u(0)F_1(\lambda x) + \frac{1}{\lambda}\theta(0)F_2(\lambda x) - \frac{1}{\lambda^2 EI}M(0)F_3(\lambda x) - \frac{1}{\lambda^3 EI}Q(0)F_4(\lambda x) \\
& - Z(u, x_M)\frac{1}{\lambda^2 EI}M_a F_3(\lambda x - \lambda x_M) + Z(u, x_P)\frac{1}{\lambda^3 EI}P F_4(\lambda x - \lambda x_P) \\
& + Z(u, v)\frac{1}{\lambda^3 EI}\int_{x_{q,i}}^{v'} q F_4(\lambda x - \lambda v) dv.
\end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
\theta(x) = & \theta(0)F_1(\lambda x) - \frac{1}{\lambda EI}M(0)F_2(\lambda x) - \frac{1}{\lambda^2 EI}Q(0)F_3(\lambda x) - 4\lambda u(0)F_4(\lambda x) \\
& - Z(u, x_M)\frac{1}{\lambda EI}M_a F_2(\lambda x - \lambda x_M) + Z(u, x_P)\frac{1}{\lambda^2 EI}P F_3(\lambda x - \lambda x_P) \\
& + Z(u, v)\frac{1}{\lambda^2 EI}\int_{x_{q,i}}^{v'} q F_3(\lambda x - \lambda v) dv.
\end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
M(x) = & M(0)F_1(\lambda x) + \frac{1}{\lambda}Q(0)F_2(\lambda x) + \frac{\kappa}{\lambda^2}u(0)F_3(\lambda x) + \frac{\kappa}{\lambda^3}\theta(0)F_4(\lambda x) \\
& + Z(u, x_M)M_a F_1(\lambda x - \lambda x_M) - Z(u, x_P)\frac{1}{\lambda}P F_2(\lambda x - \lambda x_P) \\
& - Z(u, v)\frac{1}{\lambda}\int_{x_{q,i}}^{v'} q F_2(\lambda x - \lambda v) dv.
\end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
Q(x) = & Q(0)F_1(\lambda x) + \frac{1}{\lambda}u(0)F_2(\lambda x) - \frac{1}{\lambda^2 EI}\theta(0)F_3(\lambda x) + \frac{1}{\lambda^3 EI}M(0)F_4(\lambda x) \\
& - Z(u, x_M)4\lambda M_a F_4(\lambda x - \lambda x_M) - Z(u, x_P)P F_1(\lambda x - \lambda x_P) \\
& - Z(u, v)\int_{x_{q,i}}^{v'} q F_1(\lambda x - \lambda v) dv.
\end{aligned} \tag{7}$$

O parâmetro λ , em (4), (5), (6) e (7), é definido como $\lambda = \sqrt[4]{\kappa/(EI)}$. Estas mesmas equações também contêm funções com a finalidade de simplificar a escrita. Estas funções estão apresentadas em (8) e (9).

$$\begin{aligned}
F_1(z) &= \cosh(z) \cos(z), \\
F_2(z) &= \frac{1}{2} [\cosh(z) \sen(z) + \sinh(z) \cos(z)], \\
F_3(z) &= \frac{1}{2} \sinh(z) \sen(z), \\
F_4(z) &= \frac{1}{4} [\cosh(z) \sen(z) - \sinh(z) \cos(z)].
\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
Z(u, x_M) &= \begin{cases} 0, & \text{se } x < x_M \\ 1, & \text{se } x \geq x_M \end{cases}, & Z(u, x_P) &= \begin{cases} 0, & \text{se } x < x_P \\ 1, & \text{se } x \geq x_P \end{cases} \text{ e} \\
Z(u, v) &= \begin{cases} 0, & \text{se } x < v \\ 1, & \text{se } x \geq v \end{cases}.
\end{aligned} \tag{9}$$

A última integral das equações (4) até (7) é obtida interpretando o carregamento distribuído como sendo formado por infinitas cargas concentradas, cada uma delas aplicadas na respectiva coordenada v (o eixo das coordenadas v tem mesma origem, direção e sentido do eixo x). Assim, considerando a superposição de efeitos, o resultado é uma integral. Como mostrado em (9), as integrais só afetam o resultado para $x \geq v$. O limite superior das integrais nas equações (4) até (7), v' , é o mínimo entre v e $x_{q,f}$.

A solução particular para cada viga analisada depende das condições de contorno que, na formulação unidimensional, se reduzem aos pontos extremos da viga. Neste trabalho, os extremos sempre estão sujeitos a um dos três seguintes vínculos: apoio simples (A), que prescreve deslocamento e momento; engaste (E), que prescreve deslocamento e rotação; e extremidade livre (L), prescrevendo momento e esforço cortante.

Quatro combinações de vínculos para os extremos das vigas são analisadas. A identificação se dá de acordo com os vínculos. A viga AA é a apoiada-apoiada, com apoio simples nos dois extremos, a viga EE é a engastada-engastada, com engaste nos dois extremos, a viga EA é a engastada-apoiada, com engaste no extremo esquerdo e apoio simples no direito, e a viga EL é a engastada-livre, com engaste no extremo esquerdo e extremidade livre no lado direito.

As soluções particulares do caso estático, para os quatro tipos de vigas, podem ser encontradas no Apêndice 1. Nele estão contidas as soluções analíticas para vigas sujeitas a: carga concentrada aplicada em um ponto qualquer ou carga uniformemente distribuída ao longo de todo o comprimento da viga.

2.3 SOLUÇÃO FUNDAMENTAL

A solução fundamental é um tipo específico de solução analítica. Devido a sua importância neste trabalho, um destaque maior é dado. Ela é a solução da equação

$$EI \frac{d^4 u}{dx^4} + \kappa u = \delta(\xi, x), \quad (10)$$

onde $\delta(\xi, x)$ é o delta de Dirac, que é diferente de zero para $x = \xi$ e nulo para os demais pontos (Brebbia, Telles e Wrobel [6]).

Podendo ser encontrada em Debnath e Bhatta [17] e também em Hetényi [5], a solução de (10) é

$$u = u^* = u^*(\xi, x) = \frac{1}{2a^3} \exp\left(\frac{-ar}{\sqrt{2}}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{ar}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4}\right), \quad (11)$$

onde $a^4 = \kappa/(EI)$ e $r = |\xi - x|$. Segundo a nomenclatura usual do Método dos Elementos de Contorno, ξ é o ponto fonte e x é o ponto campo. Na equação (11) e ao longo de todo o trabalho, a notação $\exp(\alpha)$ é igual ao número de Euler, e , elevado ao expoente α , ou e^α .

É interessante notar que, como em todos os outros problemas unidimensionais, não há singularidade na solução fundamental, apresentada em (11). Problemas bi ou tridimensionais, como os encontrados em Brebbia, Telles e Wrobel [6] e Brebbia e Dominguez [11], apresentam soluções fundamentais com algum tipo de singularidade, exigindo um tratamento adicional.

As variáveis definidas em (2), para um carregamento genérico, podem também ser definidas para a solução fundamental. Assim,

$$\theta^* = \frac{\partial u^*}{\partial x}, \quad M^* = -EI \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} \quad \text{e} \quad Q^* = -EI \frac{\partial^3 u^*}{\partial x^3}. \quad (12)$$

O asterisco, $*$, em (11) é a notação comumente adotada para a solução fundamental. Para as relações em (12), o asterisco foi mantido, indicando que θ^* , M^* e Q^* estão relacionados com a solução fundamental. O cálculo das derivadas em (12) está apresentado no Apêndice 2.

3 MÉTODOS NUMÉRICOS

3.1 MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS

O Método das Diferenças Finitas, MDF, requer uma discretização do domínio. Neste trabalho, o domínio espacial da viga está compreendido entre $x = 0$ e $x = L$ e é discretizado em n intervalos iguais de comprimento $\Delta x = L/n$, originando $n + 1$ pontos. Para o caso estático, a função dependente, $u(x)$, será avaliada nestes pontos e a notação adotada é $u(x_i) = u(i\Delta x) = u_i$, onde $i = 0, 1, 2, \dots, n$. As mudanças para a formulação dinâmica estão explicadas na subseção correspondente.

As Tabelas 1, 2 e 3 apresentam as aproximações das derivadas até as ordens necessárias para este trabalho e aplicadas no ponto $x = x_i$. Nas três tabelas, as aproximações apresentadas são de ordem dois, o que significa dizer que o erro envolvido na substituição das derivadas por estes quocientes é da ordem de $(\Delta x)^2$.

A Tabela 1 apresenta as aproximações centrais para as derivadas de até quarta ordem. Essas aproximações utilizam valores da função nos pontos anteriores e posteriores do ponto em que está sendo calculada a derivada, além do valor da função no próprio ponto. Já a Tabela 2 apresenta, para as derivadas de até terceira ordem, as aproximações progressivas, que utilizam valores da função nos pontos posteriores ao qual está sendo calculada a derivada, além do valor da função no próprio ponto. Por fim, a Tabela 3 apresenta as aproximações regressivas, que utilizam valores da função nos pontos anteriores e o valor da função no próprio ponto em que está sendo calculada a derivada de até terceira ordem.

Com as aproximações do MDF para as derivadas, é possível desenvolver as formulações para o caso estático e dinâmico.

TABELA 1 – APROXIMAÇÕES CENTRAIS DO MDF PARA DERIVADAS DE PRIMEIRA ATÉ QUARTA ORDEM

Derivada	Aproximação pelo MDF
$\left(\frac{du}{dx}\right)\Big _{x=x_i}$	$\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x}$
$\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)\Big _{x=x_i}$	$\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{(\Delta x)^2}$
$\left(\frac{d^3u}{dx^3}\right)\Big _{x=x_i}$	$\frac{u_{i+2} - 2u_{i+1} + 2u_{i-1} - u_{i-2}}{2(\Delta x)^3}$
$\left(\frac{d^4u}{dx^4}\right)\Big _{x=x_i}$	$\frac{u_{i+2} - 4u_{i+1} + 6u_i - 4u_{i-1} + u_{i-2}}{(\Delta x)^4}$

FONTE: Adaptada de Fornberg [8].

TABELA 2 – APROXIMAÇÕES PROGRESSIVAS DO MDF PARA DERIVADAS DE PRIMEIRA ATÉ TERCEIRA ORDEM

Derivada	Aproximação pelo MDF
$\left(\frac{du}{dx}\right)\Big _{x=x_i}$	$\frac{-3u_i + 4u_{i+1} - u_{i+2}}{2\Delta x}$
$\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)\Big _{x=x_i}$	$\frac{2u_i - 5u_{i+1} + 4u_{i+2} - u_{i+3}}{(\Delta x)^2}$
$\left(\frac{d^3u}{dx^3}\right)\Big _{x=x_i}$	$\frac{-5u_i + 18u_{i+1} - 24u_{i+2} + 14u_{i+3} - 3u_{i+4}}{2(\Delta x)^3}$

FONTE: Adaptada de Fornberg [8].

TABELA 3 – APROXIMAÇÕES REGRESSIVAS DO MDF PARA DERIVADAS DE PRIMEIRA ATÉ TERCEIRA ORDEM

Derivada	Aproximação pelo MDF
$\left(\frac{du}{dx}\right)\Big _{x=x_i}$	$\frac{u_{i-2} - 4u_{i-1} + 3u_i}{2\Delta x}$
$\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)\Big _{x=x_i}$	$\frac{-u_{i-3} + 4u_{i-2} - 5u_{i-1} + 2u_i}{(\Delta x)^2}$
$\left(\frac{d^3u}{dx^3}\right)\Big _{x=x_i}$	$\frac{3u_{i-4} - 14u_{i-3} + 24u_{i-2} - 18u_{i-1} + 5u_i}{2(\Delta x)^3}$

FONTE: Adaptada de Fornberg [8].

3.1.1 Formulação para o caso estático

Aplicando a equação (1) para um ponto qualquer i do domínio da viga, e substituindo a derivada pela sua aproximação mostrada na Tabela 1, chega-se à

$$\frac{u_{i+2} - 4u_{i+1} + 6u_i - 4u_{i-1} + u_{i-2}}{(\Delta x)^4} + \frac{\kappa u_i}{EI} = \frac{q_i}{EI}, \quad (13)$$

que pode ser reescrita como

$$u_{i+2} - 4u_{i+1} + \left[6 + \kappa \frac{(\Delta x)^4}{EI} \right] u_i - 4u_{i-1} + u_{i-2} = \frac{(\Delta x)^4}{EI} q_i, \quad (14)$$

onde $q_i = q(x_i) = q(i\Delta x)$.

A expressão (14) relaciona o valor da função u no ponto i com os valores da função u nos pontos vizinhos da discretização ($i - 2$, $i - 1$, $i + 1$ e $i + 2$). Como, *a priori*, todos os deslocamentos são desconhecidos, a solução para eles é obtida de maneira simultânea, através de um sistema de equações. Este sistema é obtido aplicando a equação (14) para todos os pontos do domínio.

Porém, ao aplicar a expressão (14) para $i = 0$, aparecem valores da função para pontos fora do domínio da viga, ou seja, u_{-2} e u_{-1} . O mesmo acontece ao aplicar a expressão (14) para $i = 1$, que resulta no aparecimento de u_{-1} . O outro extremo do domínio apresenta problemas semelhantes: $i = n - 1$ resulta no aparecimento de u_{n+1} , e $i = n$, no aparecimento de u_{n+1} e u_{n+2} . O tratamento para estes valores se dá analisando as condições de contorno prescritas para $i = 0$ e $i = n$, que dependem do tipo de vínculo existente para cada uma dessas extremidades.

Como citado no trecho final da seção 2.2, são prescritos, para vínculos do tipo apoio simples (A), u e M ; para engaste (E), u e θ ; e para extremidade livre (L), M e Q . Como também mencionado anteriormente, este trabalho desenvolve formulações para valores prescritos sempre nulos.

Com as igualdades em (2) e as aproximações centrais para o MDF da Tabela 1, é possível escrever os valores prescritos, u , θ , M ou Q , envolvendo somente valores da função u .

Assim, para o apoio simples em $i = 0$, o deslocamento é $u_0 = 0$ e o momento fletor é $M_0 = -EI \left(\frac{d^2 u}{dx^2} \right) \Big|_{x=x_0} = 0$, o que implica, após a substituição da derivada segunda pela aproximação central do MDF, em $u_{-1} = -u_1$. Analogamente, para o apoio simples em $i = n$, tem-se $u_n = 0$ e $u_{n+1} = -u_{n-1}$.

Para o engaste em $i = 0$, o deslocamento é $u_0 = 0$ e a rotação $\theta_0 = \left(\frac{du}{dx} \right) \Big|_{x=x_0} = 0$, resultando, após a substituição da derivada primeira pela aproximação central do MDF, em $u_{-1} = u_1$. Já para engaste em $i = n$, $u_n = 0$ e $u_{n+1} = u_{n-1}$.

Para a extremidade livre em $i = 0$, o momento fletor é $M_0 = -EI \left(\frac{d^2 u}{dx^2} \right) \Big|_{x=x_0} = 0$ e o esforço cortante é $Q_0 = -EI \left(\frac{d^3 u}{dx^3} \right) \Big|_{x=x_0} = 0$. Trabalhando primeiro com a equação do momento, chega-se à relação $u_{-1} = 2u_0 - u_1$. Depois, com a equação para o esforço cortante e a equivalência para u_{-1} , chega-se à $u_{-2} = 4u_0 - 4u_1 + u_2$. Analogamente, para a extremidade livre em $i = n$, $u_{n+1} = 2u_n - u_{n-1}$ e $u_{n+2} = 4u_n - 4u_{n-1} + u_{n-2}$.

Mais detalhes sobre as considerações do MDF, conforme os tipos de vínculo da viga, podem ser encontrados em Mello [10].

Com o tratamento apresentado, é possível então escrever (14) para os pontos da discretização com deslocamentos desconhecidos (não prescritos como condição de contorno). As equações podem ser arranjadas na forma de um sistema do tipo $\bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{B}}$, onde $\bar{\mathbf{B}}$ é o vetor carregamento, $\bar{\mathbf{u}}$ é o vetor dos deslocamentos desconhecidos e $\bar{\mathbf{A}}$ é a matriz que multiplica estes deslocamentos. Os elementos destes vetores e matrizes são mostrados a seguir. Eles foram montados de uma maneira genérica, sendo que o primeiro ponto desconhecido é $i = i_p$ e o último ponto desconhecido é $i = i_u$ (para as vigas analisadas neste trabalho $i_p = 1$ e $i_u = n - 1$ ou $i_u = n$).

O vetor $\bar{\mathbf{B}}$ pode ser escrito como

$$\bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} q_{(i_p)} & q_{(i_p+1)} & q_{(i_p+2)} & \cdots & q_{(i_u-2)} & q_{(i_u-1)} & q_{(i_u)} \end{bmatrix}^T, \quad (15)$$

onde seus elementos q_i dependem do tipo de carregamento aplicado na viga. Para o carrega-

mento uniformemente distribuído ao longo da viga, q ,

$$q_i = \frac{(\Delta x)^4}{EI} q. \quad (16)$$

Para um carregamento concentrado, P , aplicado no ponto i_c da discretização,

$$q_i = \begin{cases} 0, & i \neq i_c \\ \frac{(\Delta x)^4}{EI} \frac{P}{\Delta x}, & i = i_c \end{cases}. \quad (17)$$

O vetor $\bar{\mathbf{u}}$ contém os deslocamentos dos pontos desconhecidos. Assim,

$$\bar{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} u_{(i_p)} & u_{(i_p+1)} & u_{(i_p+2)} & \cdots & u_{(i_u-2)} & u_{(i_u-1)} & u_{(i_u)} \end{bmatrix}^T. \quad (18)$$

Já a matriz dos coeficientes, $\bar{\mathbf{A}}$, é um matriz quadrada de dimensão $i_p - i_u$ e pode ser escrita como

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_4 & a_5 & C_4 & C_5 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & C_5 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & C_5 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & C_5 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & C_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & C_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & C_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & C_1 & C_2 & a_6 & a_7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & a_8 & a_9 & a_{10} \end{bmatrix}, \quad (19)$$

onde $C_1 = 1$, $C_2 = -4$, $C_3 = 6 + (\Delta x)^4/EI$, $C_4 = -4$ e $C_5 = 1$. Os coeficientes a_i da matriz em (19) são determinados pelas condições de contorno. A Tabela 4 apresenta os valores destes coeficientes conforme o tipo de vínculo na extremidade esquerda ($i = 0$) e a Tabela 5, conforme o tipo de vínculo na extremidade direita ($i = n$).

TABELA 4 – COEFICIENTES DE $\bar{\mathbf{A}}$ PARA A EXTREMIDADE ESQUERDA

Coeficiente	A	E	L
a_1	$5 + (\Delta x)^4/EI$	$7 + (\Delta x)^4/EI$	$2 + (\Delta x)^4/EI$
a_2	-4	-4	-4
a_3	$+1$	$+1$	$+2$
a_4	-4	-4	-2
a_5	$6 + (\Delta x)^4/EI$	$6 + (\Delta x)^4/EI$	$5 + (\Delta x)^4/EI$

FONTE: O autor (2017).

TABELA 5 – COEFICIENTES DE $\bar{\mathbf{A}}$ PARA A EXTREMIDADE DIREITA

Coeficiente	A	E	L
a_6	$6 + (\Delta x)^4/EI$	$6 + (\Delta x)^4/EI$	$5 + (\Delta x)^4/EI$
a_7	-4	-4	-2
a_8	$+1$	$+1$	$+2$
a_9	-4	-4	-4
a_{10}	$5 + (\Delta x)^4/EI$	$7 + (\Delta x)^4/EI$	$2 + (\Delta x)^4/EI$

FONTE: O autor (2017).

Após a solução do sistema $\bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{B}}$, todos os deslocamentos da viga são conhecidos e é possível calcular a rotação e os esforços internos. Para isso, as relações em (2) foram reescritas com as aproximações das Tabelas 1, 2 e 3. As equações para o cálculo das rotações estão na Tabela 6, as para o cálculo dos momentos estão na Tabela 7 e para os esforços cortantes estão na Tabela 8.

TABELA 6 – CÁLCULO DAS ROTAÇÕES COM O MDF

Posição	Aproximação pelo MDF
$i = 0$	$\theta_0 = \frac{-3u_0 + 4u_1 - u_2}{2\Delta x}$
$0 < i < n$	$\theta_i = \frac{-u_{i-1} + u_{i+1}}{2\Delta x}$
$i = n$	$\theta_n = \frac{-u_{n-2} + 4u_{n-1} - 3u_n}{2\Delta x}$

FONTE: O autor (2017).

TABELA 7 – CÁLCULO DOS MOMENTOS FLETORES COM O MDF

Posição	Aproximação pelo MDF
$i = 0$	$M_0 = -EI \frac{2u_0 - 5u_1 + 4u_2 - 4u_3}{\Delta x^2}$
$0 < i < n$	$M_i = -EI \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{\Delta x^2}$
$i = n$	$M_n = -EI \frac{-u_{n-3} + 4u_{n-2} - 5u_{n-1} + 2u_n}{\Delta x^2}$

FONTE: O autor (2017).

TABELA 8 – CÁLCULO DOS ESFORÇOS CORTANTES COM O MDF

Posição	Aproximação pelo MDF
$i = 0$	$Q_0 = -EI \frac{-5u_0 - 18u_1 + 24u_2 - 14u_3 - 3u_4}{2\Delta x^3}$
$i = 1$	$Q_1 = -EI \frac{-5u_1 - 18u_2 + 24u_3 - 14u_4 - 3u_5}{2\Delta x^3}$
$1 < i < n - 1$	$Q_i = -EI \frac{u_{i-2} - 2u_{i-1} + u_{i+1} - u_{i+2}}{2\Delta x^3}$
$i = n - 1$	$Q_{n-1} = -EI \frac{3u_{n-5} - 14u_{n-4} + 24u_{n-3} - 18u_{n-2} + 5u_{n-1}}{2\Delta x^3}$
$i = n$	$Q_n = -EI \frac{3u_{n-4} - 14u_{n-3} + 24u_{n-2} - 18u_{n-1} + 5u_n}{2\Delta x^3}$

FONTE: O autor (2017).

3.1.2 Formulação para o caso dinâmico

No caso dinâmico, o tempo também é uma variável independente da função deslocamento, ou seja, $u = u(x, t)$. Como foi feito para o caso estático, a solução será obtida de forma discreta, mas agora haverá, além da discretização espacial, a discretização temporal. Para o espaço, a viga será discretizada como no caso estático, ou seja, em $n + 1$ pontos distantes igualmente de $\Delta x = L/n$, onde L é o comprimento total da viga. Para o tempo, a análise será efetuada em $m + 1$ pontos temporais discretos, distantes igualmente de $\Delta t = T/m$, onde T é o tempo total da análise. A notação adotada é $u(x_i, t_j) = u(i\Delta x, j\Delta t) = u_i^j$, onde $i = 0, 1, 2, \dots, n$ e $j = 0, 1, 2, \dots, m$.

Escrevendo a equação (3) para um ponto qualquer da malha $x = i\Delta x = x_i$ e $t = (j + 1)\Delta t = t_{j+1}$, tem-se

$$\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)\bigg|_{x=x_i, t=t_{j+1}} + \left(\frac{\kappa u}{EI}\right)\bigg|_{x=x_i, t=t_{j+1}} + \left(\frac{\rho A}{EI} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)\bigg|_{x=x_i, t=t_{j+1}} = \left(\frac{q(x, t)}{EI}\right)\bigg|_{x=x_i, t=t_{j+1}}. \quad (20)$$

As aproximações para o primeiro e segundo elemento do lado esquerdo e o elemento do lado direito do sinal de igualdade da relação (20) são muito similares às do caso estático. A exceção é a aproximação para a derivada temporal, tomada como

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)\bigg|_{x=x_i, t=t_{j+1}} = \frac{u_i^{j+1} - 2u_i^j + u_i^{j-1}}{(\Delta t)^2}, \quad (21)$$

que é a aproximação regressiva de primeira ordem do MDF para derivada segunda, com erro envolvido de ordem um, Δt , como encontrado em Fornberg [8]. Deve-se notar que nas Tabelas 1, 2 e 3 as aproximações são de ordem dois. Coincidentemente, a aproximação empregada ao obter (21) é igual a aproximação para a derivada segunda apresentada na Tabela 1. Como a derivada parcial é em relação ao tempo, (21) relaciona o deslocamento do ponto $x = x_i$ nos tempos t_{j+1} , t_j e t_{j-1} .

Na equação (20), após realizada a substituição da derivada espacial pela aproximação central do MDF, apresentada na Tabela 1, e da derivada temporal, como apresentado em (21), chega-se em

$$\frac{u_{i+2}^{j+1} - 4u_{i+1}^{j+1} + 6u_i^{j+1} - 4u_{i-1}^{j+1} + u_{i-2}^{j+1}}{(\Delta x)^4} + \frac{\kappa u_i^{j+1}}{EI} + \frac{\rho A}{EI} \frac{u_i^{j+1} - 2u_i^j + u_i^{j-1}}{(\Delta t)^2} = \frac{q_i^{j+1}}{EI}. \quad (22)$$

que pode ser reorganizada como

$$\begin{aligned} u_{i+2}^{j+1} - 4u_{i+1}^{j+1} + \left[6 + \kappa \frac{(\Delta x)^4}{EI}\right] u_i^{j+1} - 4u_{i-1}^{j+1} + u_{i-2}^{j+1} + \frac{(\Delta x)^4}{(\Delta t)^2} \frac{\rho A}{EI} u_i^{j+1} \\ = \frac{(\Delta x)^4}{EI} q_i^{j+1} + \frac{(\Delta x)^4}{(\Delta t)^2} \frac{\rho A}{EI} (2u_i^j - u_i^{j-1}). \end{aligned} \quad (23)$$

O fato da equação estar escrita em função de $t = t_{j+1}$ origina a formulação implícita do MDF, que é estável independentemente da relação entre Δx e Δt (Smith [9]).

No caso dinâmico, os deslocamentos dos pontos ao longo da viga para o próximo passo de tempo, $t = t_{j+1}$ são calculados baseados nos deslocamentos dos passos de tempo atual, $t = t_j$ e anterior, $t = t_{j-1}$.

As condições iniciais são

$$u(x, 0) = 0 \text{ e } \dot{u}(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad (24)$$

que expressam, respectivamente, o deslocamento e a velocidade iniciais, admitidas sempre nulas neste trabalho. Como já se conhece o deslocamento no instante inicial, a análise inicia calculando os deslocamentos da viga no instante $t = t_1 = 1\Delta t$. Assim, a equação (23) é escrita para todos os pontos $x = x_i$ da viga no tempo $t = t_1$ ($j = 0$).

Porém, ao aplicar $j = 0$ aparecem deslocamentos no instante de tempo $t = t_{-1}$, fora do domínio da análise. Este problema pode ser resolvido utilizando as condições iniciais do problema, mostradas em (24).

Substituindo a derivada que aparece em (24), que representa matematicamente a viga partindo do repouso, pela sua correspondente no MDF na Tabela 1, é possível escrever que

$$\dot{u}(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_i^{j+1} - u_i^{j-1}}{2\Delta t} = \frac{u_i^1 - u_i^{-1}}{2\Delta t} = 0 \quad \therefore u_i^{-1} = u_i^1, \forall i, \quad (25)$$

que resolve o problema do passo de tempo fora do domínio da análise.

Mas ao escrever a equação (23) para os pontos $i = 0$, $i = 1$, $i = n - 1$ ou $i = n$, para qualquer passo de tempo, também surgem problemas. Aparecem pontos fora do domínio da viga, como aconteceu no caso estático. O tratamento dado para estes pontos é análogo ao do caso estático.

Portanto, com o tratamento apresentado para os pontos que fogem do domínio do tempo ou do espaço da viga, é possível escrever a relação (23) para qualquer ponto da viga em qualquer instante de tempo da discretização.

O deslocamento de cada ponto da discretização é dependente do deslocamento dos pontos vizinhos no instante atual e do próprio ponto em instantes de tempo anteriores. Assim, a solução dos deslocamentos para todos os pontos num dado instante de tempo acontece de

maneira simultânea, através de um sistema de equações, que pode ser representado na forma $\underline{\underline{\mathbf{A}}}\mathbf{u}_t^{j+1} = \underline{\underline{\mathbf{B}}}$. Nele, $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$ é o vetor independente, que contém os valores já conhecidos, \mathbf{u}_t^{j+1} é o vetor dos deslocamentos em $t = t_{j+1}$, desconhecidos, e $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ é a matriz que multiplica estes deslocamentos. Graças à similaridade que a equação (23) apresenta com a equação (14), dos deslocamentos para o caso estático, a matriz $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ e o vetor $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$ podem ser escritos como

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \overline{\mathbf{A}} + \left[(1 + \tau) \frac{(\Delta x)^4 \rho A}{(\Delta t)^2 EI} \right] \mathbf{I}, \quad (26)$$

e

$$\underline{\underline{\mathbf{B}}} = \overline{\mathbf{B}} + \left[\frac{(\Delta x)^4 \rho A}{(\Delta t)^2 EI} \right] \left[2\mathbf{u}_t^j + (1 - \tau)\mathbf{u}_t^{j-1} \right], \quad (27)$$

onde $\overline{\mathbf{A}}$ é a matriz dos coeficientes para o caso estático, apresentada em (19), \mathbf{I} é a matriz identidade de mesma ordem que $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$, $\overline{\mathbf{B}}$ é o vetor carregamento do caso estático, mostrado em (15) e τ é definido na sequência. Os vetores \mathbf{u}_t^j e \mathbf{u}_t^{j-1} , na relação (27), representam os deslocamentos conhecidos nos instantes de tempo $t = j\Delta t$ e $t = (j - 1)\Delta t$, respectivamente.

Como apresentado na equação (25), o cálculo dos deslocamentos no primeiro passo de tempo é diferente do cálculo para os passos seguintes. Este fato é representado, em (26) e (27), pela constante τ , que pode assumir dois valores. Para o primeiro passo de tempo, $j = 0$, a constante vale $\tau = 1$. Para os passos de tempo seguintes, $\tau = 0$.

Então, para o primeiro passo de tempo, $j = 0$, montam-se as matrizes com $\tau = 1$ e resolve-se o sistema. Para os próximos passos de tempo, $j = 1, 2, 3, \dots, m$, montam-se as matrizes com $\tau = 0$ e resolve-se o sistema. É necessário que sejam conhecidos os deslocamentos nos passos de tempo anterior e atual para calcular os deslocamentos no passo de tempo seguinte, caracterizando a marcha no tempo.

Com os deslocamentos calculados, é possível calcular os esforços internos. Eles são calculados de maneira análoga à apresentada para o caso estático nas Tabelas 6, 7 e 8.

3.2 MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO - ESTÁTICO

3.2.1 Resíduos ponderados

A técnica de resíduos ponderados vai ser aplicada à equação da estática. Assim, introduzindo uma solução aproximada, \tilde{u} , para a deflexão em (1), são gerados resíduos no domínio,

$$R_D = \frac{d^4 \tilde{u}}{dx^4} + \frac{\kappa \tilde{u}}{EI} - \frac{q(x)}{EI}, \quad (28)$$

resíduos nas condições de contorno em $x = 0$,

$$\left(R_1\right)\Big|_{x=0} \text{ e } \left(R_2\right)\Big|_{x=0}, \quad (29)$$

e resíduos nas condições de contorno em $x = L$,

$$\left(R_3\right)\Big|_{x=L} \text{ e } \left(R_4\right)\Big|_{x=L}. \quad (30)$$

Os resíduos apresentados em (29) e (30) dependem das condições de contorno de cada viga, ou seja, de quais valores são prescritos. Para as vigas analisadas, citadas anteriormente, a Tabela 9 mostra os tipos de resíduos no contorno. Nela, as variáveis \hat{u} , $\hat{\theta}$, \hat{M} e \hat{Q} se referem a valores prescritos, conhecidos, enquanto \tilde{u} , $\tilde{\theta}$, \tilde{M} e \tilde{Q} se referem a valores aproximados, calculados.

TABELA 9 – RESÍDUOS DE CONTORNO

Tipo de viga	$\left(R_1\right)\Big _{x=0}$	$\left(R_2\right)\Big _{x=0}$	$\left(R_3\right)\Big _{x=L}$	$\left(R_4\right)\Big _{x=L}$
AA	$\hat{u}(0) - \tilde{u}(0)$	$\hat{M}(0) - \tilde{M}(0)$	$\hat{u}(L) - \tilde{u}(L)$	$\hat{M}(L) - \tilde{M}(L)$
EE	$\hat{u}(0) - \tilde{u}(0)$	$\hat{\theta}(0) - \tilde{\theta}(0)$	$\hat{u}(L) - \tilde{u}(L)$	$\hat{\theta}(L) - \tilde{\theta}(L)$
EA	$\hat{u}(0) - \tilde{u}(0)$	$\hat{\theta}(0) - \tilde{\theta}(0)$	$\hat{u}(L) - \tilde{u}(L)$	$\hat{M}(L) - \tilde{M}(L)$
EL	$\hat{u}(0) - \tilde{u}(0)$	$\hat{\theta}(0) - \tilde{\theta}(0)$	$\hat{M}(L) - \tilde{M}(L)$	$\hat{Q}(L) - \tilde{Q}(L)$

FONTE: O autor (2017).

A sentença de resíduos ponderados pode ser escrita como

$$\int_0^L R_D w_D \, dx + \left(R_1 w_1\right)\Big|_{x=0} + \left(R_2 w_2\right)\Big|_{x=0} + \left(R_3 w_3\right)\Big|_{x=L} + \left(R_4 w_4\right)\Big|_{x=L} = 0, \quad (31)$$

onde as funções w são as funções de ponderação para os resíduos R .

Com a igualdade dada em (28) e após aplicar integração por partes quatro vezes, a integral em (31) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \int_0^L R_D w_D \, dx &= \int_0^L w_D \left(\frac{d^4 \tilde{u}}{dx^4} + \frac{\kappa \tilde{u}}{EI} \right) dx - \int_0^L \frac{q(x)}{EI} w_D \, dx \\ &= \left(\frac{d^3 \tilde{u}}{dx^3} w_D - \frac{d^2 \tilde{u}}{dx^2} \frac{dw_D}{dx} + \frac{d\tilde{u}}{dx} \frac{d^2 w_D}{dx^2} - \tilde{u} \frac{d^3 w_D}{dx^3} \right) \Big|_{x=L} \\ &\quad - \left(\frac{d^3 \tilde{u}}{dx^3} w_D - \frac{d^2 \tilde{u}}{dx^2} \frac{dw_D}{dx} + \frac{d\tilde{u}}{dx} \frac{d^2 w_D}{dx^2} - \tilde{u} \frac{d^3 w_D}{dx^3} \right) \Big|_{x=0} \\ &\quad + \int_0^L \tilde{u} \left(\frac{d^4 w_D}{dx^4} + \frac{\kappa w_D}{EI} \right) dx - \int_0^L \frac{q(x)}{EI} w_D \, dx. \end{aligned} \quad (32)$$

O Método dos Elementos de Contorno é obtido com a escolha apropriada das funções de ponderação. Assim, a função de ponderação do domínio, w_D , deve ser igual à solução fundamental, u^* , apresentada na equação (11). Logo, com as equações em (2) e em (12), o resíduo ponderado para o domínio é

$$\begin{aligned} \int_0^L R_D w_D \, dx &= \left(-\frac{\tilde{Q}}{EI} u^* + \frac{\tilde{M}}{EI} \theta^* - \tilde{\theta} \frac{M^*}{EI} + \tilde{u} \frac{Q^*}{EI} \right) \Big|_{x=L} \\ &\quad - \left(-\frac{\tilde{Q}}{EI} u^* + \frac{\tilde{M}}{EI} \theta^* - \tilde{\theta} \frac{M^*}{EI} + \tilde{u} \frac{Q^*}{EI} \right) \Big|_{x=0} \\ &\quad + \int_0^L \tilde{u} \delta(\xi, x) \, dx - \int_0^L \frac{q(x)}{EI} u^* \, dx. \end{aligned} \quad (33)$$

A escolha de $w_D = u^*$ faz com que a primeira integral do lado direito da equação (33) possa ser simplificada com as propriedades do delta de Dirac, resultando em $\int_0^L \tilde{u} \delta(\xi, x) \, dx = \int_0^L \tilde{u}(x) \delta(\xi, x) \, dx = \tilde{u}(\xi)$. Assim, aplicando esta simplificação em (33), é possível reescrever

(31) como

$$\begin{aligned}
 \tilde{u}(\xi) = & \left(\frac{\tilde{Q}}{EI} u^* - \frac{\tilde{M}}{EI} \theta^* + \tilde{\theta} \frac{M^*}{EI} - \tilde{u} \frac{Q^*}{EI} \right) \Big|_{x=L} - (R_3 w_3) \Big|_{x=L} - (R_4 w_4) \Big|_{x=L} \\
 & - \left(\frac{\tilde{Q}}{EI} u^* - \frac{\tilde{M}}{EI} \theta^* + \tilde{\theta} \frac{M^*}{EI} - \tilde{u} \frac{Q^*}{EI} \right) \Big|_{x=0} - (R_1 w_1) \Big|_{x=0} - (R_2 w_2) \Big|_{x=0} \\
 & + \int_0^L \frac{q(x)}{EI} u^* dx.
 \end{aligned} \tag{34}$$

Em (34), aparecem as variáveis \tilde{u} , $\tilde{\theta}$, \tilde{M} e \tilde{Q} nos dois pontos que constituem o contorno. Porém, quatro destes valores são sempre fornecidos pelas condições de contorno, não havendo necessidade de calculá-los de maneira aproximada. A escolha apropriada das funções de ponderação dos resíduos de contorno, w_1 , w_2 , w_3 e w_4 , é capaz de eliminar o cálculo aproximado destes valores já conhecidos. Para cada tipo de viga analisada, tais funções de ponderação estão na Tabela 10.

TABELA 10 – FUNÇÕES DE PONDERAÇÃO DOS RESÍDUOS DE CONTORNO

Tipo de viga	w_1	w_2	w_3	w_4
AA	$-\frac{Q^*}{EI}$	$-\frac{\theta^*}{EI}$	$+\frac{Q^*}{EI}$	$+\frac{\theta^*}{EI}$
EE	$-\frac{Q^*}{EI}$	$+\frac{M^*}{EI}$	$+\frac{Q^*}{EI}$	$-\frac{M^*}{EI}$
EA	$-\frac{Q^*}{EI}$	$+\frac{M^*}{EI}$	$+\frac{Q^*}{EI}$	$-\frac{M^*}{EI}$
EL	$-\frac{Q^*}{EI}$	$+\frac{M^*}{EI}$	$+\frac{\theta^*}{EI}$	$-\frac{\theta^*}{EI}$

FONTE: O autor (2017).

Com os resíduos da Tabela 9 e as funções de ponderação da Tabela 10, a equação (34) pode ser escrita para as vigas analisadas.

Assim, para a viga apoiada-apoiada

$$\begin{aligned} \tilde{u}(\xi) = & \left(\frac{\tilde{Q}}{EI} u^* - \frac{\hat{M}}{EI} \theta^* + \tilde{\theta} \frac{M^*}{EI} - \hat{u} \frac{Q^*}{EI} \right) \Big|_{x=L} \\ & - \left(\frac{\tilde{Q}}{EI} u^* - \frac{\hat{M}}{EI} \theta^* + \tilde{\theta} \frac{M^*}{EI} - \hat{u} \frac{Q^*}{EI} \right) \Big|_{x=0} + \int_0^L \frac{q}{EI} u^* dx, \end{aligned} \quad (35)$$

para a viga engastada-engastada

$$\begin{aligned} \tilde{u}(\xi) = & \left(\frac{\tilde{Q}}{EI} u^* - \frac{\tilde{M}}{EI} \theta^* + \hat{\theta} \frac{M^*}{EI} - \hat{u} \frac{Q^*}{EI} \right) \Big|_{x=L} \\ & - \left(\frac{\tilde{Q}}{EI} u^* - \frac{\tilde{M}}{EI} \theta^* + \hat{\theta} \frac{M^*}{EI} - \hat{u} \frac{Q^*}{EI} \right) \Big|_{x=0} + \int_0^L \frac{q}{EI} u^* dx, \end{aligned} \quad (36)$$

para a viga engastada-apoiada

$$\begin{aligned} \tilde{u}(\xi) = & \left(\frac{\tilde{Q}}{EI} u^* - \frac{\hat{M}}{EI} \theta^* + \tilde{\theta} \frac{M^*}{EI} - \hat{u} \frac{Q^*}{EI} \right) \Big|_{x=L} \\ & - \left(\frac{\tilde{Q}}{EI} u^* - \frac{\tilde{M}}{EI} \theta^* + \hat{\theta} \frac{M^*}{EI} - \hat{u} \frac{Q^*}{EI} \right) \Big|_{x=0} + \int_0^L \frac{q}{EI} u^* dx, \end{aligned} \quad (37)$$

e para a viga engastada-livre

$$\begin{aligned} \tilde{u}(\xi) = & \left(\frac{\hat{Q}}{EI} u^* - \frac{\hat{M}}{EI} \theta^* + \tilde{\theta} \frac{M^*}{EI} - \tilde{u} \frac{Q^*}{EI} \right) \Big|_{x=L} \\ & - \left(\frac{\tilde{Q}}{EI} u^* - \frac{\tilde{M}}{EI} \theta^* + \hat{\theta} \frac{M^*}{EI} - \hat{u} \frac{Q^*}{EI} \right) \Big|_{x=0} + \int_0^L \frac{q}{EI} u^* dx. \end{aligned} \quad (38)$$

Percebe-se que (35), (36), (37) e (38) diferem somente em quais valores são prescritos e em quais são aproximados. Ao se desprezar a notação que as diferencia, as equações citadas se tornam iguais entre si e também iguais a

$$\begin{aligned} u(\xi) = & \left(\frac{Q}{EI} u^* - \frac{M}{EI} \theta^* + \theta \frac{M^*}{EI} - u \frac{Q^*}{EI} \right) \Big|_{x=L} \\ & - \left(\frac{Q}{EI} u^* - \frac{M}{EI} \theta^* + \theta \frac{M^*}{EI} - u \frac{Q^*}{EI} \right) \Big|_{x=0} + \int_0^L \frac{q}{EI} u^* dx. \end{aligned} \quad (39)$$

3.2.2 Formulação integral estática

A equação (39) foi obtida aplicando o Método dos Elementos de Contorno para o problema estático de vigas sobre base elástica. A integral do domínio que aparece do lado direito da igualdade contém a solução fundamental, u^* , que depende do módulo $|x - \xi|$. Assim, para $x \leq \xi$, a integral é calculada de uma maneira e, para $x \geq \xi$, de outra maneira. Então, a equação (39) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}
 u(\xi) = & \left(\frac{Q}{EI} u^* - \frac{M}{EI} \theta^* + \theta \frac{M^*}{EI} - u \frac{Q^*}{EI} \right) \Big|_{x=L} \\
 & - \left(\frac{Q}{EI} u^* - \frac{M}{EI} \theta^* + \theta \frac{M^*}{EI} - u \frac{Q^*}{EI} \right) \Big|_{x=0} \\
 & + \int_0^\xi \frac{q}{EI} u^* dx + \int_\xi^L \frac{q}{EI} u^* dx.
 \end{aligned} \tag{40}$$

A equação (40) calcula a deflexão da viga em um ponto ξ . Conforme mostrado em (2), é possível calcular a rotação, θ , derivando a expressão do deslocamento, u . Na equação (40), a variável que representa a posição do ponto na viga é ξ e, por isso, a rotação é obtida derivando u em relação a ξ . Assim

$$\begin{aligned}
 \theta(\xi) = & \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\left(\frac{Q}{EI} u^* - \frac{M}{EI} \theta^* + \theta \frac{M^*}{EI} - u \frac{Q^*}{EI} \right) \Big|_{x=L} \right] \\
 & - \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\left(\frac{Q}{EI} u^* - \frac{M}{EI} \theta^* + \theta \frac{M^*}{EI} - u \frac{Q^*}{EI} \right) \Big|_{x=0} \right] \\
 & + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\int_0^\xi \frac{q}{EI} u^* dx \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\int_\xi^L \frac{q}{EI} u^* dx \right).
 \end{aligned} \tag{41}$$

É importante notar que, em (41), as integrais que envolvem o carregamento possuem limites de integração que são funções de ξ , que é a mesma variável da derivada. Portanto, a derivada das integrais que envolvem a carga são calculadas pela regra de Leibniz¹, resultando

¹Como pode ser encontrado em Kaplan [18], a regra de Leibniz afirma que

$$\frac{d}{d\xi} \left[\int_{a(\xi)}^{b(\xi)} f(\xi, x) dx \right] = f(\xi, b(\xi)) \frac{d}{d\xi} [b(\xi)] - f(\xi, a(\xi)) \frac{d}{d\xi} [a(\xi)] + \int_{a(\xi)}^{b(\xi)} \frac{\partial}{\partial \xi} [f(\xi, x)] dx. \tag{42}$$

em

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\int_0^\xi \frac{q}{EI} u^* dx \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\int_\xi^L \frac{q}{EI} u^* dx \right) = \\ \int_0^\xi \frac{q}{EI} \frac{\partial u^*}{\partial \xi} dx + \frac{q}{EI} u^* \Big|_{x=\xi} + \int_\xi^L \frac{q}{EI} \frac{\partial u^*}{\partial \xi} dx - \frac{q}{EI} u^* \Big|_{x=\xi} = \\ \int_0^\xi \frac{q}{EI} \frac{\partial u^*}{\partial \xi} dx + \int_\xi^L \frac{q}{EI} \frac{\partial u^*}{\partial \xi} dx. \end{aligned} \quad (43)$$

Assim, a equação (41) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \theta(\xi) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\left(\frac{Q}{EI} u^* - \frac{M}{EI} \theta^* + \theta \frac{M^*}{EI} - u \frac{Q^*}{EI} \right) \Big|_{x=L} \right] \\ - \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\left(\frac{Q}{EI} u^* - \frac{M}{EI} \theta^* + \theta \frac{M^*}{EI} - u \frac{Q^*}{EI} \right) \Big|_{x=0} \right] \\ + \int_0^\xi \frac{q}{EI} \frac{\partial u^*}{\partial \xi} dx + \int_\xi^L \frac{q}{EI} \frac{\partial u^*}{\partial \xi} dx. \end{aligned} \quad (44)$$

Partindo das relações em (2) e aplicando o mesmo processo utilizado para a rotação, θ , é possível chegar, para M , em

$$\begin{aligned} M(\xi) = - \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left[\left(Q u^* - M \theta^* + \theta M^* - u Q^* \right) \Big|_{x=L} \right] \\ + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left[\left(Q u^* - M \theta^* + \theta M^* - u Q^* \right) \Big|_{x=0} \right] \\ - \int_0^\xi q \frac{\partial^2 u^*}{\partial \xi^2} dx - \int_\xi^L q \frac{\partial^2 u^*}{\partial \xi^2} dx, \end{aligned} \quad (45)$$

e para Q , em

$$\begin{aligned} Q(\xi) = - \frac{\partial^3}{\partial \xi^3} \left[\left(Q u^* - M \theta^* + \theta M^* - u Q^* \right) \Big|_{x=L} \right] \\ + \frac{\partial^3}{\partial \xi^3} \left[\left(Q u^* - M \theta^* + \theta M^* - u Q^* \right) \Big|_{x=0} \right] \\ - \int_0^\xi q \frac{\partial^3 u^*}{\partial \xi^3} dx - \int_\xi^L q \frac{\partial^3 u^*}{\partial \xi^3} dx. \end{aligned} \quad (46)$$

O cálculo das integrais em (40), (44), (45) e (46), para carregamento concentrado e

uniformemente distribuído sobre toda a viga, está apresentado no Apêndice 3.

Do lado direito da igualdade nas equações (40), (44), (45) e (46) aparecem os valores de u , θ , M e Q no contorno (em $x = 0$ e $x = L$). Destes oito valores, quatro são conhecidos devido as condições de contorno (naturais e essenciais). Os valores das outras quatro incógnitas são obtidos com um sistema de equações, montado com (40), (44), (45) e/ou (46) aplicadas no contorno ($\xi = 0$ e $\xi = L$), bastando somente quatro das oito equações possíveis. A escolha do ponto de aplicação é proposital, já que, assim, o lado esquerdo das igualdades também vai ser um dos oito valores, não acrescentando mais variáveis ao problema. Neste trabalho, foram escolhidas a equação (40) e a equação (44) aplicadas no contorno.

A sistema de equações pode ser escrito como

$$\overline{\mathbf{H}}\overline{\mathbf{u}} = \overline{\mathbf{G}}\overline{\mathbf{q}} + \overline{\mathbf{B}}, \quad (47)$$

onde

$$\overline{\mathbf{H}} = \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} 1 - Q^* \Big|_{\xi=0}^{x=0} & Q^* \Big|_{\xi=0}^{x=L} & M^* \Big|_{\xi=0}^{x=0} & -M^* \Big|_{\xi=0}^{x=L} \\ -Q^* \Big|_{\xi=L}^{x=0} & 1 + Q^* \Big|_{\xi=L}^{x=L} & M^* \Big|_{\xi=L}^{x=0} & -M^* \Big|_{\xi=L}^{x=L} \\ -\frac{\partial Q^*}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0}^{x=0} & \frac{\partial Q^*}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0}^{x=L} & 1 + \frac{\partial M^*}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0}^{x=0} & -\frac{\partial M^*}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0}^{x=L} \\ -\frac{\partial Q^*}{\partial \xi} \Big|_{\xi=L}^{x=0} & \frac{\partial Q^*}{\partial \xi} \Big|_{\xi=L}^{x=L} & \frac{\partial M^*}{\partial \xi} \Big|_{\xi=L}^{x=0} & 1 - \frac{\partial M^*}{\partial \xi} \Big|_{\xi=L}^{x=L} \end{bmatrix}, \quad (48)$$

$$\overline{\mathbf{G}} = \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} -u^* \Big|_{\xi=0}^{x=0} & u^* \Big|_{\xi=0}^{x=L} & \theta^* \Big|_{\xi=0}^{x=0} & -\theta^* \Big|_{\xi=0}^{x=L} \\ -u^* \Big|_{\xi=L}^{x=0} & u^* \Big|_{\xi=L}^{x=L} & \theta^* \Big|_{\xi=L}^{x=0} & -\theta^* \Big|_{\xi=L}^{x=L} \\ -\frac{\partial u^*}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0}^{x=0} & \frac{\partial u^*}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0}^{x=L} & \frac{\partial \theta^*}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0}^{x=0} & -\frac{\partial \theta^*}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0}^{x=L} \\ -\frac{\partial u^*}{\partial \xi} \Big|_{\xi=L}^{x=0} & \frac{\partial u^*}{\partial \xi} \Big|_{\xi=L}^{x=L} & \frac{\partial \theta^*}{\partial \xi} \Big|_{\xi=L}^{x=0} & -\frac{\partial \theta^*}{\partial \xi} \Big|_{\xi=L}^{x=L} \end{bmatrix}, \quad (49)$$

$$\bar{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} u|_{x=0} & u|_{x=L} & \theta|_{x=0} & \theta|_{x=L} \end{bmatrix}^T, \quad (50)$$

$$\bar{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} Q|_{x=0} & Q|_{x=L} & M|_{x=0} & M|_{x=L} \end{bmatrix}^T \quad (51)$$

e

$$\bar{\mathbf{B}} = \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} \int_0^L qu^* dx \Big|_{\xi=0} & \int_0^L qu^* dx \Big|_{\xi=L} & \int_0^L q \frac{\partial u^*}{\partial \xi} dx \Big|_{\xi=0} & \int_0^L q \frac{\partial u^*}{\partial \xi} dx \Big|_{\xi=L} \end{bmatrix}^T. \quad (52)$$

As matrizes $\bar{\mathbf{H}}$ e $\bar{\mathbf{G}}$ possuem quatro linhas e quatro colunas, ou 4×4 e $\bar{\mathbf{u}}$, $\bar{\mathbf{q}}$ e $\bar{\mathbf{B}}$ são matrizes coluna de quatro elementos, ou matrizes 4×1 .

A primeira linha das matrizes $\bar{\mathbf{H}}$, $\bar{\mathbf{G}}$ e $\bar{\mathbf{B}}$ foi obtida com a equação (40) aplicada em $\xi = 0$. A segunda, com a equação (40) aplicada em $\xi = L$. A terceira, com a equação (44) aplicada em $\xi = 0$. A quarta, e última, linha destas matrizes, foi obtida com a equação (44) aplicada em $\xi = L$.

Definido o tipo de viga a ser analisada, as condições de contorno ficam definidas e é possível reescrever o sistema da equação (47) como $\mathbf{Ax} = \mathbf{B}_c \mathbf{y} + \bar{\mathbf{B}} = \mathbf{B}$, onde \mathbf{x} é a matriz 4×1 que contém todas as incógnitas, \mathbf{A} é a matriz 4×4 dos coeficientes destas incógnitas, \mathbf{y} é a matriz 4×1 das condições de contorno prescritas e \mathbf{B}_c é a matriz 4×4 dos coeficientes das condições de contorno.

Após a solução do sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{B}$, o deslocamento, u , a rotação, θ , o momento fletor, M e o esforço cortante, Q , são conhecidos no contorno. Em seguida, qualquer uma dessas grandezas pode ser calculada para qualquer ponto interno, utilizando as equações (40), (44), (45) e (46).

3.3 MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO - DINÂMICO

3.3.1 Resíduos ponderados

Para o caso dinâmico, a equação governante é a (3). A variável u passa a depender também do tempo, ou seja, $u = u(x, t)$. A formulação empregada neste trabalho será a MEC-D, cujo desenvolvimento é muito similar à do MEC, para o caso estático. Como citado na revisão bibliográfica, a formulação MEC-D não elimina todas as integrais de domínio.

A técnica de resíduos ponderados também é o princípio desta formulação. Então, adotando uma solução aproximada $\tilde{u} = \tilde{u}(x, t)$ são gerados resíduos de contorno e de domínio. Os resíduos do contorno são análogos ao do caso estático, como apresentado na Tabela 9. Os resíduos R_1 até R_4 apresentados naquela Tabela valem, no caso dinâmico, para qualquer instante de tempo. Porém, o resíduo de domínio passa a ser

$$R_D = \frac{\partial^4 \tilde{u}}{\partial x^4} + \frac{\kappa \tilde{u}}{EI} + \frac{\rho A}{EI} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} - \frac{q(x, t)}{EI}. \quad (53)$$

A sentença de resíduos ponderados para o caso dinâmico pode ser escrita como

$$\int_0^L R_D w_D dx + \left(R_1 w_1 \right) \Big|_{x=0} + \left(R_2 w_2 \right) \Big|_{x=0} + \left(R_3 w_3 \right) \Big|_{x=L} + \left(R_4 w_4 \right) \Big|_{x=L} = 0, \quad (54)$$

que é equivalente ao caso estático, mostrado na expressão (31). As funções w , a princípio arbitrárias, são as funções de ponderação para os resíduos R . A integral em (54), relativa ao resíduo de domínio, pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \int_0^L R_D w_D dx &= \int_0^L w_D \left(\frac{\partial^4 \tilde{u}}{\partial x^4} + \frac{\kappa \tilde{u}}{EI} \right) dx - \int_0^L \frac{q(x, t)}{EI} w_D dx + \int_0^L \frac{\rho A}{EI} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} w_D dx \\ &= \left(\frac{\partial^3 \tilde{u}}{\partial x^3} w_D - \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} \frac{dw_D}{dx} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \frac{d^2 w_D}{dx^2} - \tilde{u} \frac{d^3 w_D}{dx^3} \right) \Big|_{x=L} \\ &\quad - \left(\frac{\partial^3 \tilde{u}}{\partial x^3} w_D - \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} \frac{dw_D}{dx} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \frac{d^2 w_D}{dx^2} - \tilde{u} \frac{d^3 w_D}{dx^3} \right) \Big|_{x=0} \\ &\quad + \int_0^L \tilde{u} \left(\frac{d^4 w_D}{dx^4} + \frac{\kappa w_D}{EI} \right) dx - \int_0^L \frac{q(x, t)}{EI} w_D dx + \int_0^L \frac{\rho A}{EI} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} w_D dx. \end{aligned} \quad (55)$$

Como para o caso estático, foi aplicado integração por partes quatro vezes na primeira integral à direita do primeiro sinal de igualdade em (55).

Uma característica do MEC-D é a escolha da solução fundamental do problema estático como função de ponderação, isto é, $w_D = u^* = u^*(\xi, x)$, com u^* definida em (11). Agregando esta escolha com as relações de (2) e (12), é possível escrever os resíduos ponderados no domínio como

$$\begin{aligned} \int_0^L R_D w_D dx = & \left(-\frac{\tilde{Q}}{EI} u^* + \frac{\tilde{M}}{EI} \theta^* - \tilde{\theta} \frac{M^*}{EI} + \tilde{u} \frac{Q^*}{EI} \right) \Big|_{x=0}^{x=L} \\ & + \int_0^L \tilde{u} \delta(\xi, x) dx - \int_0^L \frac{q(x, t)}{EI} u^* dx + \int_0^L \frac{\rho A}{EI} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} u^* dx. \end{aligned} \quad (56)$$

Utilizando novamente a propriedade do delta de Dirac, $\delta(\xi, x)$, que simplifica a integral que o contém, a primeira integral de domínio à esquerda da igualdade em (56) resulta em $\int_0^L \tilde{u} \delta(\xi, x) dx = \int_0^L \tilde{u}(x, t) \delta(\xi, x) dx = \tilde{u}(\xi, t)$. Então, simplificando (56) e substituindo a expressão resultante em (54), chega-se em

$$\begin{aligned} \tilde{u}(\xi, t) = & \left(\frac{\tilde{Q}}{EI} u^* - \frac{\tilde{M}}{EI} \theta^* + \tilde{\theta} \frac{M^*}{EI} - \tilde{u} \frac{Q^*}{EI} \right) \Big|_{x=L} - (R_3 w_3) \Big|_{x=L} - (R_4 w_4) \Big|_{x=L} \\ & - \left(\frac{\tilde{Q}}{EI} u^* - \frac{\tilde{M}}{EI} \theta^* + \tilde{\theta} \frac{M^*}{EI} - \tilde{u} \frac{Q^*}{EI} \right) \Big|_{x=0} - (R_1 w_1) \Big|_{x=0} - (R_2 w_2) \Big|_{x=0} \\ & + \int_0^L \frac{q(x, t)}{EI} u^* dx - \frac{\rho A}{EI} \int_0^L \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} u^* dx. \end{aligned} \quad (57)$$

A escolha das funções de ponderação para o contorno, w_1 até w_4 , são feitas de maneira específica e seus valores são iguais ao caso estático, mostrados na Tabela 10. A equação (57) é muito parecida com a (34), sendo a integral que envolve a aceleração, $\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2}$, a maior diferença. Após substituir os resíduos e as funções de ponderação do contorno para cada caso, vigas apoiada-apoiada, engastada-engastada, engastada-apoiada e engastada-livre, a similaridade se mantém. Como foi mostrado para o caso estático nas equações (35), (36), (37) e (38), a diferença reside em valores calculados e valores fornecidos pelas condições de contorno. Então, desprezando a notação que diferencia valores aproximados e valores

prescritos, é possível escrever a equação para o deslocamento como

$$\begin{aligned}
 u(\xi, t) = & \left(\frac{Q}{EI} u^* - \frac{M}{EI} \theta^* + \theta \frac{M^*}{EI} - u \frac{Q^*}{EI} \right) \Big|_{x=L} \\
 & - \left(\frac{Q}{EI} u^* - \frac{M}{EI} \theta^* + \theta \frac{M^*}{EI} - u \frac{Q^*}{EI} \right) \Big|_{x=0} \\
 & + \int_0^L \frac{q(x, t)}{EI} u^* dx - \frac{\rho A}{EI} \int_0^L \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} u^* dx,
 \end{aligned} \tag{58}$$

sendo que, do lado direito da igualdade, $u = u(x, t)$, $\theta = \theta(x, t)$, $M = M(x, t)$, $Q = Q(x, t)$, $u^* = u^*(\xi, x)$, $\theta^* = \theta^*(\xi, x)$, $M^* = M^*(\xi, x)$ e $Q^* = Q^*(\xi, x)$.

Em (58) existem duas integrais de domínio: uma envolvendo o carregamento, que é resolvida de forma analítica como no caso estático, e outra que envolve a aceleração, que é função do deslocamento. Apesar de ser possível remover esta última integral da formulação, a solução apresentada neste trabalho a manteve, exigindo uma discretização do domínio para seu cálculo. O domínio espacial da viga é definido de $x = 0$ até $x = L$ e vai ser discretizado em n células com tamanhos constantes e iguais $\Delta x = L/n$. Os pontos extremos de cada célula são denominados nós, numerados de $i = 0, 1, 2, \dots, n$.

Porém, nem todos os elementos à direita da igualdade (58) são conhecidos. Boa parte deles vai ser calculada como feito no caso estático e está apresentado na subseção 3.2.2. A aceleração é uma característica somente do caso dinâmico e o tratamento dela é apresentado nas duas subseções seguintes.

3.3.2 Aproximação temporal da aceleração

A aceleração é aproximada no tempo com o Método de Houbolt (Houbolt [14]), que relaciona a aceleração de um ponto, em um dado instante de tempo, com os deslocamentos deste mesmo ponto, neste instante de tempo e em anteriores. Neste trabalho, a aceleração é calculada para os nós de cada célula.

Ao utilizar instantes de tempo, está implícito que o tempo é discretizado. O domínio temporal vai desde o instante inicial, $t = 0$, até o final da análise, $t = T$, e vai ser discretizado

em m passos de tempo constantes e iguais a $\Delta t = T/m$. Os passos de tempo são numerados de $j = 0, 1, 2, \dots, m$.

A expressão do Método de Houbolt para a aceleração é obtida derivando duas vezes, em relação ao tempo, a interpolação cúbica de Lagrange do deslocamento $u(x, t)$, desde o tempo $t_{j-2} = (j-2)\Delta t$ até $t_{j+1} = (j+1)\Delta t$. Algebricamente, a aceleração para um ponto i , no passo de tempo $j+1$, é

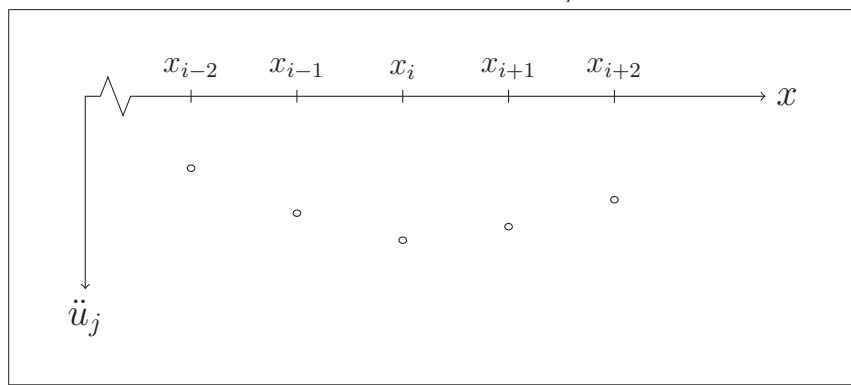
$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|_{\substack{x=x_i \\ t=t_{j+1}}} = \frac{\partial^2 u_i^{j+1}}{\partial t^2} = \ddot{u}_i^{j+1} = \frac{1}{\Delta t^2} (2u_i^{j+1} - 5u_i^j + 4u_i^{j-1} - u_i^{j-2}), \quad (59)$$

onde $u_i^j = u(i\Delta x, j\Delta t)$ e $\ddot{u}_i^j = \ddot{u}(i\Delta x, j\Delta t)$.

Ou seja, para calcular a derivada para o próximo intervalo de tempo, são necessárias informações do deslocamento do próximo, do atual e de dois passos de tempo anteriores. Porém, para o primeiro passo de tempo, $j = 0$, aparecem deflexões em passos de tempo negativos, u_i^{-1} e u_i^{-2} . Recorrendo às condições iniciais e às aproximações de diferenças finitas progressivas e regressivas, chega-se que $u_i^{-1} = u_i^0 - \Delta t \dot{u}_i^0$ e $u_i^{-2} = 2u_i^{-1} - u_i^0$ (sendo que $\dot{u}_i^0 = \dot{u}(i\Delta x, 0\Delta t)$ é a velocidade do ponto i no instante inicial, $t = 0$). Para as condições iniciais nulas, tem-se $u_i^{-1} = 0$ e $u_i^{-2} = 0$. Um desenvolvimento e detalhes desta formulação podem ser encontrados em Fleischfresser [19].

A integral de domínio que contém a aceleração, na equação (58), é avaliada ao longo de toda a viga, de maneira contínua. A Figura 2 mostra uma representação dos resultados que podem ser obtidos com a aproximação com o Método de Houbolt para a aceleração.

FIGURA 2 – GRÁFICO GENÉRICO DA ACELERAÇÃO EM UM DADO INSTANTE DE TEMPO $t = j\Delta t$ PARA PONTOS PERTENCENTES À DISCRETIZAÇÃO DA VIGA



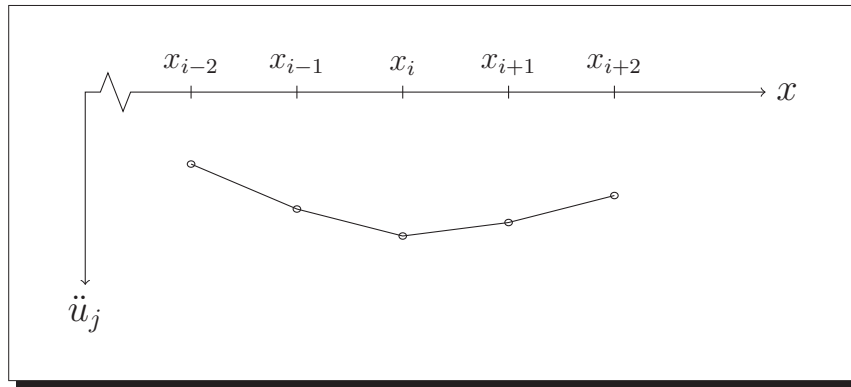
FONTE: O autor (2017).

Ao analisar a Figura 2, percebe-se que não há uma função contínua que possibilite o cálculo da integral diretamente. Assim, para que o cálculo seja possível, o comportamento da aceleração entre os nós de cada célula da discretização precisa ser conhecido. Neste trabalho, ele vai ser aproximado e a subseção seguinte apresenta os detalhes envolvidos.

3.3.3 Aproximação espacial da aceleração

Para cada instante de tempo, o comportamento da aceleração dentro de cada célula é admitido linear. Isso permite descrever o comportamento da aceleração com a equação de uma reta, contendo a aceleração dos nós extremos de cada célula. Assim, com o apresentado na subseção anterior, 3.3.2, é possível calcular a integral em (58). Visualmente, este comportamento pode ser representado na Figura 2, resultando na Figura 3.

FIGURA 3 – GRÁFICO GENÉRICO DA ACELERAÇÃO EM UM DADO INSTANTE DE TEMPO $t = j\Delta t$ COM APROXIMAÇÃO LINEAR ENTRE OS PONTOS PERTENCENTES À DISCRETIZAÇÃO DA VIGA



FONTE: O autor (2017).

Tomando uma célula qualquer da Figura 3, limitada pelos nós $x = x_i$ e $x = x_{i+1}$, é possível escrever a aceleração como

$$\ddot{u}(x, j\Delta t) = \ddot{u}_i^j \phi_i(x) + \ddot{u}_{i+1}^j \phi_{i+1}(x), \text{ para } x_i \leq x \leq x_{i+1} \text{ e } \forall j, \quad (60)$$

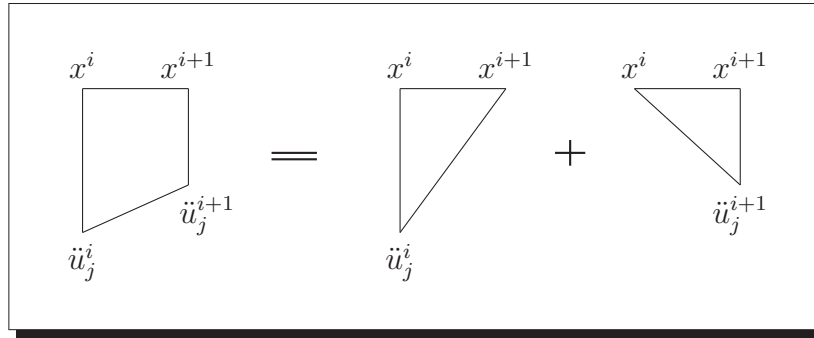
onde

$$\phi_i(x) = \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}, \quad x_i \leq x \leq x_{i+1}, \quad (61)$$

$$\phi_{i+1}(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}, \quad x_i \leq x \leq x_{i+1}, \quad (62)$$

\ddot{u}_i^j é a aceleração do nó inicial da célula, i , e \ddot{u}_{i+1}^j é a aceleração do nó final da célula, $i + 1$, ambas em um instante de tempo qualquer $t = t_j = j\Delta t$. Uma representação gráfica de (60) pode ser vista na Figura 4.

FIGURA 4 – ESQUEMA CONSIDERADO PARA A APROXIMAÇÃO LINEAR DA ACELERAÇÃO PARA CADA CÉLULA



FONTE: O autor (2017).

Substituindo (61) e (62) em (60), resulta em

$$\ddot{u}(x, j\Delta t) = \frac{1}{x_{i+1} - x_i} \left[\ddot{u}_i^j x_{i+1} - \ddot{u}_i^j x + \ddot{u}_{i+1}^j x - \ddot{u}_{i+1}^j x_i \right], \quad x_i \leq x \leq x_{i+1} \text{ e } \forall j. \quad (63)$$

Vale ressaltar que, na equação (63), a variável contínua é somente x . Os elementos com índices são valores pontuais da variável. Ou seja, $x_i = i\Delta x$ é a coordenada espacial do i -ésimo ponto da viga e \ddot{u}_i^j é o valor da aceleração no ponto x_i no tempo $t = j\Delta t$.

Com a continuidade da aceleração gerada pela aproximação (60), é possível calcular a integral $\int_{x_i}^{x_{i+1}} \ddot{u}u^* dx$ dentro de cada célula. Assim, a integral de domínio que contém a aceleração em (58) pode ser escrita como

$$\int_0^L \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} u^* dx = \int_0^L \ddot{u}u^* dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \ddot{u}u^* dx. \quad (64)$$

Ou seja, a integral de $x = 0$ até $x = L$ é calculada como um somatório de integrais limitadas pelas coordenadas de cada célula. Cada integral que envolve u^* depende do valor de ξ , que é considerado nos nós das células, sendo representado como $\xi_k = k\Delta x$, com $k = 0, 1, 2, \dots, n$.

Com a igualdade em (63), cada elemento do somatório da equação (64) pode, então,

ser escrito como

$$\begin{aligned}
 \int_{x_i}^{x_{i+1}} \ddot{u} u^* dx &= \frac{1}{x_{i+1} - x_i} \left(\ddot{u}_i^j x_{i+1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} u^* dx - \ddot{u}_i^j \int_{x_i}^{x_{i+1}} x u^* dx \right. \\
 &\quad \left. + \ddot{u}_{i+1}^j \int_{x_i}^{x_{i+1}} x u^* dx - \ddot{u}_{i+1}^j x_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} u^* dx \right) \\
 &= \frac{1}{\Delta x} \left[\ddot{u}_i^j \left(x_{i+1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} u^* dx - \int_{x_i}^{x_{i+1}} x u^* dx \right) \right. \\
 &\quad \left. + \ddot{u}_{i+1}^j \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} x u^* dx - x_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} u^* dx \right) \right].
 \end{aligned} \tag{65}$$

O denominador $x_{i+1} - x_i$ em (63) foi substituído pelo tamanho da célula Δx , já que neste trabalho é sempre constante.

Com a igualdade em (65), é possível expandir o somatório da equação (64), que resulta em

$$\begin{aligned}
 \int_0^L \ddot{u} u^* dx &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \ddot{u} u^* dx = \frac{1}{\Delta x} \left\{ \left[\ddot{u}_0^j \left(x_1 \int_{x_0}^{x_1} u^* dx - \int_{x_0}^{x_1} x u^* dx \right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \ddot{u}_1^j \left(\int_{x_0}^{x_1} x u^* dx - x_0 \int_{x_0}^{x_1} u^* dx \right) \right] + \left[\ddot{u}_1^j \left(x_2 \int_{x_1}^{x_2} u^* dx - \int_{x_1}^{x_2} x u^* dx \right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \ddot{u}_2^j \left(\int_{x_1}^{x_2} x u^* dx - x_1 \int_{x_1}^{x_2} u^* dx \right) \right] + \dots \right. \\
 &\quad \left. \dots + \left[\ddot{u}_{n-2}^j \left(x_{n-1} \int_{x_{n-2}}^{x_{n-1}} u^* dx - \int_{x_{n-2}}^{x_{n-1}} x u^* dx \right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \ddot{u}_{n-1}^j \left(\int_{x_{n-2}}^{x_{n-1}} x u^* dx - x_{n-2} \int_{x_{n-2}}^{x_{n-1}} u^* dx \right) \right] + \left[\ddot{u}_{n-1}^j \left(x_n \int_{x_{n-1}}^{x_n} u^* dx - \int_{x_{n-1}}^{x_n} x u^* dx \right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \ddot{u}_n^j \left(\int_{x_{n-1}}^{x_n} x u^* dx - x_{n-1} \int_{x_{n-1}}^{x_n} u^* dx \right) \right] \right\}.
 \end{aligned} \tag{66}$$

Depois da igualdade, cada linha da equação (66) envolve o valor de aceleração, \ddot{u} , em somente um ponto da viga. Assim, agrupando os termos semelhantes, é possível escrever

$$\int_0^L \ddot{u} u^* dx = \sum_{i=0}^n \ddot{u}_i m_{ik}, \tag{67}$$

onde o coeficiente m depende do índice i , relacionado com x , e do índice k , relacionado com ξ .

Os coeficientes de (67) são, para $1 \leq i \leq n-1$

$$m_{ik} = \frac{1}{\Delta x} \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} x u^* dx - x_{i-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} u^* dx \right) + \frac{1}{\Delta x} \left(x_{i+1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} u^* dx - \int_{x_i}^{x_{i+1}} x u^* dx \right), \quad (68)$$

para $i = 0$

$$m_{0k} = \frac{1}{\Delta x} \left(x_1 \int_{x_0}^{x_1} u^* dx - \int_{x_0}^{x_1} x u^* dx \right), \quad (69)$$

e para $i = n$

$$m_{nk} = \frac{1}{\Delta x} \left(\int_{x_{n-1}}^{x_n} x u^* dx - x_{n-1} \int_{x_{n-1}}^{x_n} u^* dx \right). \quad (70)$$

Apesar de, nas equações (68), (69) e (70) não aparecer explicitamente o índice k à direita da igualdade, ele afeta o cálculo das integrais, já que $u^* = u^*(x, \xi)$. Quando $k \leq i$, significa que $\xi = \xi_k = k\Delta x \leq i\Delta x = x_i = x$ e a integral é calculada de uma maneira. Já quando $k \geq i$, ela é calculada de outra maneira. As soluções destas integrais estão nos Apêndices 4 e 5.

Como no caso estático, para calcular a rotação e os esforços, vão ser aplicadas derivadas em relação a ξ na equação (58). Um dos termos originados é a derivada da integral da domínio que contém a aceleração. Utilizando as regra de Leibniz mais uma vez, a primeira derivada em relação a ξ da integral citada resulta em

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\int_0^L \ddot{u} u^* dx \right) &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\int_0^\xi \ddot{u} u^* dx \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\int_\xi^L \ddot{u} u^* dx \right) = \\ &= \int_0^\xi \ddot{u} \frac{\partial u^*}{\partial \xi} dx + \frac{\partial \xi}{\partial \xi} \ddot{u} u^* \Big|_{x=\xi} + \int_\xi^L \ddot{u} \frac{\partial u^*}{\partial \xi} dx - \frac{\partial \xi}{\partial \xi} \ddot{u} u^* \Big|_{x=\xi} = \\ &= \int_0^\xi \ddot{u} \frac{\partial u^*}{\partial \xi} dx + \int_\xi^L \ddot{u} \frac{\partial u^*}{\partial \xi} dx. \end{aligned} \quad (71)$$

O princípio utilizado na equação (71) pode ser estendido para qualquer grau de deri-

vada, resultando em

$$\begin{aligned} \frac{\partial^\eta}{\partial \xi^\eta} \left(\int_0^L \ddot{u} u^* dx \right) &= \frac{\partial^\eta}{\partial \xi^\eta} \left(\int_0^\xi \ddot{u} u^* dx \right) + \frac{\partial^\eta}{\partial \xi^\eta} \left(\int_\xi^L \ddot{u} u^* dx \right) = \\ &= \int_0^\xi \ddot{u} \frac{\partial^\eta u^*}{\partial \xi^\eta} dx + \int_\xi^L \ddot{u} \frac{\partial^\eta u^*}{\partial \xi^\eta} dx = \int_0^L \ddot{u} \frac{\partial^\eta u^*}{\partial \xi^\eta} dx, \end{aligned} \quad (72)$$

onde η é o grau da derivada.

Assim, é possível derivar a equação (67) em relação a ξ , obtendo

$$\frac{\partial^\eta}{\partial \xi^\eta} \left(\int_0^L \ddot{u} u^* dx \right) = \int_0^L \ddot{u} \frac{\partial^\eta u^*}{\partial \xi^\eta} dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \ddot{u} \frac{\partial^\eta u^*}{\partial \xi^\eta} dx = \sum_{i=0}^n \ddot{u}_i \frac{\partial^\eta m_{ik}}{\partial \xi^\eta} \quad (73)$$

onde os coeficientes $\frac{\partial^\eta m_{ik}}{\partial \xi^\eta}$ são calculados como, para $1 \leq i \leq n-1$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^\eta m_{ik}}{\partial \xi^\eta} &= \frac{1}{\Delta x} \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} x \frac{\partial^\eta u^*}{\partial \xi^\eta} dx - x_{i-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{\partial^\eta u^*}{\partial \xi^\eta} dx \right) \\ &+ \frac{1}{\Delta x} \left(x_{i+1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{\partial^\eta u^*}{\partial \xi^\eta} dx - \int_{x_i}^{x_{i+1}} x \frac{\partial^\eta u^*}{\partial \xi^\eta} dx \right), \end{aligned} \quad (74)$$

para $i = 0$

$$\frac{\partial^\eta m_{0k}}{\partial \xi^\eta} = \frac{1}{\Delta x} \left(x_1 \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial^\eta u^*}{\partial \xi^\eta} dx - \int_{x_0}^{x_1} x \frac{\partial^\eta u^*}{\partial \xi^\eta} dx \right), \quad (75)$$

e para $i = n$

$$\frac{\partial^\eta m_{nk}}{\partial \xi^\eta} = \frac{1}{\Delta x} \left(\int_{x_{n-1}}^{x_n} x \frac{\partial^\eta u^*}{\partial \xi^\eta} dx - x_{n-1} \int_{x_{n-1}}^{x_n} \frac{\partial^\eta u^*}{\partial \xi^\eta} dx \right). \quad (76)$$

O cálculo das integrais de (74), (75) e (76) está apresentado nos Apêndices 4 e 5.

Vale ressaltar que (68), (69) e (70) são, respectivamente, (74), (75) e (76) para $\eta = 0$.

Com o apresentado nesta subseção e na anterior, é possível finalizar a formulação do MEC-D para o caso dinâmico das vigas.

3.3.4 Formulação integral dinâmica

Na subseção 3.3.1, foi apresentada, em (58), a equação para o cálculo dos deslocamentos ao longo do tempo e ao longo de vigas sob base elástica. Nesta equação, aparece

a integral da aceleração, que acrescenta outra incógnita ao problema. Nas duas subseções seguintes, 3.3.2 e 3.3.3, foi apresentada a maneira como a aceleração é tratada neste trabalho, sendo aproximada temporalmente com o Método de Houbolt e variando de forma linear dentro de cada célula. Foi comentado também que a solução numérica será obtida somente para a malha formada pelos nós das células e pela discretização temporal. Com a discretização, as coordenadas espaciais são iguais a $x = x_i = i\Delta x$ e $\xi = \xi_k = k\Delta x$ com i e k variando de zero até o número de células, n , e a variável temporal é igual a $t = t_j = j\Delta t$, com j variando de zero até m , que está associado ao tempo final da análise.

Portanto, com a aproximação da aceleração mostrada nas subseções anteriores e sabendo que as equações são escritas para alguns pontos do domínio, a equação (58) pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
 u_k^{j+1} = u(\xi_k, t_{j+1}) = & \left(\frac{Q}{EI} u^* - \frac{M}{EI} \theta^* + \theta \frac{M^*}{EI} - u \frac{Q^*}{EI} \right) \Bigg|_{x=L}^{t=t_{j+1}} \\
 & - \left(\frac{Q}{EI} u^* - \frac{M}{EI} \theta^* + \theta \frac{M^*}{EI} - u \frac{Q^*}{EI} \right) \Bigg|_{x=0}^{t=t_{j+1}} \\
 & + \left(\int_0^{\xi_k} \frac{q(x, t)}{EI} u^* dx + \int_{\xi_k}^L \frac{q(x, t)}{EI} u^* dx \right) \Bigg|_{t=t_{j+1}} \\
 & - \frac{\rho A}{EI} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{\Delta t^2} (2u_i^{j+1} - 5u_i^j + 4u_i^{j-1} - u_i^{j-2}) m_{ik}.
 \end{aligned} \tag{77}$$

Do lado direito da igualdade u , θ , M , Q e o carregamento, q , são funções de x e t . Já a solução fundamental, u^* , e as variáveis oriundas dela, θ^* , M^* e Q^* , são funções de ξ e x .

Derivando a equação (77), chega-se na equação da rotação

$$\begin{aligned}
 \theta_k^{j+1} = \theta(\xi_k, t_{j+1}) = & \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\left(\frac{Q}{EI} u^* - \frac{M}{EI} \theta^* + \theta \frac{M^*}{EI} - u \frac{Q^*}{EI} \right) \Bigg|_{x=L}^{t=t_{j+1}} \right] \\
 & - \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\left(\frac{Q}{EI} u^* - \frac{M}{EI} \theta^* + \theta \frac{M^*}{EI} - u \frac{Q^*}{EI} \right) \Bigg|_{x=0}^{t=t_{j+1}} \right] \\
 & + \left(\int_0^{\xi_k} \frac{q}{EI} \frac{\partial u^*}{\partial \xi} dx + \int_{\xi_k}^L \frac{q}{EI} \frac{\partial u^*}{\partial \xi} dx \right) \Bigg|_{t=t_{j+1}} \\
 & - \frac{\rho A}{EI} \sum_{i=0}^{n-1} (2u_i^{j+1} - 5u_i^j + 4u_i^{j-1} - u_i^{j-2}) \frac{\partial m_{ik}}{\partial \xi}.
 \end{aligned} \tag{78}$$

Analogamente, partindo do mostrado em (2), a equação para o momento fletor é

$$\begin{aligned}
 M_k^{j+1} = M(\xi_k, t_{j+1}) = & -\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left[\left(Qu^* - M\theta^* + \theta M^* - uQ^* \right) \Big|_{x=L} \right]^{t=t_{j+1}} \\
 & + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left[\left(Qu^* - M\theta^* + \theta M^* - uQ^* \right) \Big|_{x=0} \right]^{t=t_{j+1}} \\
 & - \left(\int_0^{\xi_k} q \frac{\partial^2 u^*}{\partial \xi^2} dx + \int_{\xi_k}^L q \frac{\partial^2 u^*}{\partial \xi^2} dx \right) \Big|^{t=t_{j+1}} \\
 & + \rho A \sum_{i=0}^{n-1} (2u_i^{j+1} - 5u_i^j + 4u_i^{j-1} - u_i^{j-2}) \frac{\partial^2 m_{ik}}{\partial \xi^2}
 \end{aligned} \tag{79}$$

e para o esforço cortante

$$\begin{aligned}
 Q_k^{j+1} = Q(\xi_k, t_{j+1}) = & -\frac{\partial^3}{\partial \xi^3} \left[\left(Qu^* - M\theta^* + \theta M^* - uQ^* \right) \Big|_{x=L} \right]^{t=t_{j+1}} \\
 & + \frac{\partial^3}{\partial \xi^3} \left[\left(Qu^* - M\theta^* + \theta M^* - uQ^* \right) \Big|_{x=0} \right]^{t=t_{j+1}} \\
 & - \left(\int_0^{\xi_k} q \frac{\partial^3 u^*}{\partial \xi^3} dx + \int_{\xi_k}^L q \frac{\partial^3 u^*}{\partial \xi^3} dx \right) \Big|^{t=t_{j+1}} \\
 & + \rho A \sum_{i=0}^{n-1} (2u_i^{j+1} - 5u_i^j + 4u_i^{j-1} - u_i^{j-2}) \frac{\partial^3 m_{ik}}{\partial \xi^3}.
 \end{aligned} \tag{80}$$

As quatro equações anteriores calculam os esforços para qualquer ponto da discretização da viga no instante de tempo $t = t_{j+1}$, desde que sejam conhecidos: os valores de u ao longo da viga, desde o instante de tempo $t = t_{j-2}$ até $t = t_{j+1}$; e os valores de θ , M e Q no contorno (em $x = 0$ e $x = L$) no instante de tempo $t = t_{j+1}$.

A solução geral se dá através de um sistema que tem como variáveis os quatro valores desconhecidos no contorno e os deslocamentos dos nós internos, todos avaliados em $t = t_{j+1}$. Neste trabalho as equações utilizadas para montar o sistema são a do deslocamento, (77), e a da rotação, (78). As quatro primeiras equações do sistema são a (77) para $\xi = 0$, (77) para $\xi = L$, (78) para $\xi = 0$ e (78) para $\xi = L$. As outras $n - 1$ equações são as do deslocamento, aplicadas para $\xi = k\Delta x$, com k variando de 1 até $n - 1$.

Assim, o sistema de equações formado pode ser escrito como

$$\mathbf{\underline{H}}\mathbf{\underline{u}} = \mathbf{\underline{G}}\mathbf{\underline{q}} + \mathbf{\underline{B}} + \mathbf{\underline{M}}\ddot{\mathbf{\underline{u}}} \quad (81)$$

onde os elementos de cada matriz serão descritos na sequência.

A matriz $\mathbf{\underline{H}}$ pode ser escrita em submatrizes como

$$\mathbf{\underline{H}} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{CC} & \mathbf{0} \\ \mathbf{H}_{DC} & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad (82)$$

onde $\mathbf{H}_{CC} = \overline{\mathbf{H}}$, que é a matriz 4×4 do caso estático, definida em (48), $\mathbf{0}$ é a matriz nula de dimensão $4 \times (n - 1)$,

$$\mathbf{H}_{DC} = \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} -Q^* \Big|_{\substack{x=0 \\ \xi=\xi_1}} & Q^* \Big|_{\substack{x=L \\ \xi=\xi_1}} & M^* \Big|_{\substack{x=0 \\ \xi=\xi_1}} & -M^* \Big|_{\substack{x=L \\ \xi=\xi_1}} \\ -Q^* \Big|_{\substack{x=0 \\ \xi=\xi_2}} & Q^* \Big|_{\substack{x=L \\ \xi=\xi_2}} & M^* \Big|_{\substack{x=0 \\ \xi=\xi_2}} & -M^* \Big|_{\substack{x=L \\ \xi=\xi_2}} \\ -Q^* \Big|_{\substack{x=0 \\ \xi=\xi_3}} & Q^* \Big|_{\substack{x=L \\ \xi=\xi_3}} & M^* \Big|_{\substack{x=0 \\ \xi=\xi_3}} & -M^* \Big|_{\substack{x=L \\ \xi=\xi_3}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -Q^* \Big|_{\substack{x=0 \\ \xi=\xi_{(n-3)}}} & Q^* \Big|_{\substack{x=L \\ \xi=\xi_{(n-3)}}} & M^* \Big|_{\substack{x=0 \\ \xi=\xi_{(n-3)}}} & -M^* \Big|_{\substack{x=L \\ \xi=\xi_{(n-3)}}} \\ -Q^* \Big|_{\substack{x=0 \\ \xi=\xi_{(n-2)}}} & Q^* \Big|_{\substack{x=L \\ \xi=\xi_{(n-2)}}} & M^* \Big|_{\substack{x=0 \\ \xi=\xi_{(n-2)}}} & -M^* \Big|_{\substack{x=L \\ \xi=\xi_{(n-2)}}} \\ -Q^* \Big|_{\substack{x=0 \\ \xi=\xi_{(n-1)}}} & Q^* \Big|_{\substack{x=L \\ \xi=\xi_{(n-1)}}} & M^* \Big|_{\substack{x=0 \\ \xi=\xi_{(n-1)}}} & -M^* \Big|_{\substack{x=L \\ \xi=\xi_{(n-1)}}} \end{bmatrix} \quad (83)$$

e \mathbf{I} é a matriz identidade de dimensão $n - 1$.

Já o vetor $\mathbf{\underline{u}}$ pode ser dividido em dois subvetores como

$$\mathbf{\underline{u}} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_C \\ \mathbf{u}_D \end{bmatrix}, \quad (84)$$

onde \mathbf{u}_C é o vetor $\bar{\mathbf{u}}$, mostrado em (50), avaliado no tempo $t = t_{j+1}$, e

$$\mathbf{u}_D = \left[u \Big|_{x=x_1}^{t=t_{j+1}} \quad u \Big|_{x=x_2}^{t=t_{j+1}} \quad u \Big|_{x=x_3}^{t=t_{j+1}} \quad \cdots \quad u \Big|_{x=x_{n-3}}^{t=t_{j+1}} \quad u \Big|_{x=x_{n-2}}^{t=t_{j+1}} \quad u \Big|_{x=x_{n-1}}^{t=t_{j+1}} \right]^T. \quad (85)$$

A matriz \mathbf{G} pode ser escrita como

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{CC} \\ \mathbf{G}_{DC} \end{bmatrix} \quad (86)$$

onde $\mathbf{G}_{CC} = \bar{\mathbf{G}}$, definida em (49) e

$$\mathbf{G}_{DC} = \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} u^* \Big|_{x=0}^{x=L} \Big|_{\xi=\xi_1} & -u^* \Big|_{x=0}^{x=L} \Big|_{\xi=\xi_1} & -\theta^* \Big|_{x=0}^{x=L} \Big|_{\xi=\xi_1} & \theta^* \Big|_{x=0}^{x=L} \Big|_{\xi=\xi_1} \\ u^* \Big|_{x=0}^{x=L} \Big|_{\xi=\xi_2} & -u^* \Big|_{x=0}^{x=L} \Big|_{\xi=\xi_2} & -\theta^* \Big|_{x=0}^{x=L} \Big|_{\xi=\xi_2} & \theta^* \Big|_{x=0}^{x=L} \Big|_{\xi=\xi_2} \\ u^* \Big|_{x=0}^{x=L} \Big|_{\xi=\xi_3} & -u^* \Big|_{x=0}^{x=L} \Big|_{\xi=\xi_3} & -\theta^* \Big|_{x=0}^{x=L} \Big|_{\xi=\xi_3} & \theta^* \Big|_{x=0}^{x=L} \Big|_{\xi=\xi_3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u^* \Big|_{x=0}^{x=L} \Big|_{\xi=\xi_{(n-3)}} & -u^* \Big|_{x=0}^{x=L} \Big|_{\xi=\xi_{(n-3)}} & -\theta^* \Big|_{x=0}^{x=L} \Big|_{\xi=\xi_{(n-3)}} & \theta^* \Big|_{x=0}^{x=L} \Big|_{\xi=\xi_{(n-3)}} \\ u^* \Big|_{x=0}^{x=L} \Big|_{\xi=\xi_{(n-2)}} & -u^* \Big|_{x=0}^{x=L} \Big|_{\xi=\xi_{(n-2)}} & -\theta^* \Big|_{x=0}^{x=L} \Big|_{\xi=\xi_{(n-2)}} & \theta^* \Big|_{x=0}^{x=L} \Big|_{\xi=\xi_{(n-2)}} \\ u^* \Big|_{x=0}^{x=L} \Big|_{\xi=\xi_{(n-1)}} & -u^* \Big|_{x=0}^{x=L} \Big|_{\xi=\xi_{(n-1)}} & -\theta^* \Big|_{x=0}^{x=L} \Big|_{\xi=\xi_{(n-1)}} & \theta^* \Big|_{x=0}^{x=L} \Big|_{\xi=\xi_{(n-1)}} \end{bmatrix} \quad (87)$$

Por sua vez, o vetor \mathbf{q} apresenta só os valores de contorno e é o vetor do caso estático, mostrado em (51), avaliado em $t = t_{j+1}$.

O vetor relacionado com o carregamento, \mathbf{B} , pode também ser definido como dois subvetores. Assim,

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_C \\ \mathbf{B}_D \end{bmatrix}, \quad (88)$$

onde \mathbf{B}_C é o vetor $\overline{\mathbf{B}}$, mostrado em (52), avaliado no tempo $t = t_{j+1}$, e

$$\mathbf{B}_D = \frac{1}{EI} \left[\int_0^L qu^* dx \Big|_{\xi=\xi_1}^{t=t_{j+1}} \quad \int_0^L qu^* dx \Big|_{\xi=\xi_2}^{t=t_{j+1}} \quad \cdots \quad \int_0^L qu^* dx \Big|_{\xi=\xi_{n-2}}^{t=t_{j+1}} \quad \int_0^L qu^* dx \Big|_{\xi=\xi_{n-1}}^{t=t_{j+1}} \right]^T \quad (89)$$

A matriz $\underline{\mathbf{M}}$ também pode ser escrita em duas submatrizes como

$$\underline{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{CC} \\ \mathbf{M}_{DC} \end{bmatrix}, \quad (90)$$

onde

$$\mathbf{M}_{CC} = \begin{bmatrix} m_{(0)(0)} & m_{(1)(0)} & m_{(3)(0)} & \cdots & m_{(n-2)(0)} & m_{(n-1)(0)} & m_{(n)(0)} \\ m_{(0)(n)} & m_{(1)(n)} & m_{(3)(n)} & \cdots & m_{(n-2)(n)} & m_{(n-1)(n)} & m_{(n)(n)} \\ \frac{\partial m_{(0)(0)}}{\partial \xi} & \frac{\partial m_{(1)(0)}}{\partial \xi} & \frac{\partial m_{(3)(0)}}{\partial \xi} & \cdots & \frac{\partial m_{(n-2)(0)}}{\partial \xi} & \frac{\partial m_{(n-1)(0)}}{\partial \xi} & \frac{\partial m_{(n)(0)}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial m_{(0)(n)}}{\partial \xi} & \frac{\partial m_{(1)(n)}}{\partial \xi} & \frac{\partial m_{(3)(n)}}{\partial \xi} & \cdots & \frac{\partial m_{(n-2)(n)}}{\partial \xi} & \frac{\partial m_{(n-1)(n)}}{\partial \xi} & \frac{\partial m_{(n)(n)}}{\partial \xi} \end{bmatrix}, \quad (91)$$

e

$$\mathbf{M}_{DC} = \begin{bmatrix} m_{(0)(1)} & m_{(1)(1)} & m_{(2)(1)} & \cdots & m_{(n-2)(1)} & m_{(n-1)(1)} & m_{(n)(1)} \\ m_{(0)(2)} & m_{(1)(2)} & m_{(2)(2)} & \cdots & m_{(n-2)(2)} & m_{(n-1)(2)} & m_{(n)(2)} \\ m_{(0)(3)} & m_{(1)(3)} & m_{(2)(3)} & \cdots & m_{(n-2)(3)} & m_{(n-1)(3)} & m_{(n)(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{(0)(n-3)} & m_{(1)(n-3)} & m_{(2)(n-3)} & \cdots & m_{(n-2)(n-3)} & m_{(n-1)(n-3)} & m_{(n)(n-3)} \\ m_{(0)(n-2)} & m_{(1)(n-2)} & m_{(2)(n-2)} & \cdots & m_{(n-2)(n-2)} & m_{(n-1)(n-2)} & m_{(n)(n-2)} \\ m_{(0)(n-1)} & m_{(1)(n-1)} & m_{(2)(n-1)} & \cdots & m_{(n-2)(n-1)} & m_{(n-1)(n-1)} & m_{(n)(n-1)} \end{bmatrix}. \quad (92)$$

Os elementos de (91) e (92) são calculados como apresentado em (74), (75) e (76).

O último elemento da equação (81) a ser definido é o vetor $\ddot{\mathbf{u}}$, composto da aceleração

de cada ponto, ou seja,

$$\ddot{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \ddot{u}_0^{j+1} \\ \ddot{u}_1^{j+1} \\ \ddot{u}_2^{j+1} \\ \vdots \\ \ddot{u}_{n-2}^{j+1} \\ \ddot{u}_{n-1}^{j+1} \\ \ddot{u}_n^{j+1} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta t^2} \begin{bmatrix} 2u_0^{j+1} - 5u_0^j + 4u_0^{j-1} - u_0^{j-2} \\ 2u_1^{j+1} - 5u_1^j + 4u_1^{j-1} - u_1^{j-2} \\ 2u_2^{j+1} - 5u_2^j + 4u_2^{j-1} - u_2^{j-2} \\ \vdots \\ 2u_{n-2}^{j+1} - 5u_{n-2}^j + 4u_{n-2}^{j-1} - u_{n-2}^{j-2} \\ 2u_{n-1}^{j+1} - 5u_{n-1}^j + 4u_{n-1}^{j-1} - u_{n-1}^{j-2} \\ 2u_n^{j+1} - 5u_n^j + 4u_n^{j-1} - u_n^{j-2} \end{bmatrix} \quad (93)$$

$$= \frac{1}{\Delta t^2} \begin{bmatrix} 2u_0^{j+1} \\ 2u_1^{j+1} \\ 2u_2^{j+1} \\ \vdots \\ 2u_{n-2}^{j+1} \\ 2u_{n-1}^{j+1} \\ 2u_n^{j+1} \end{bmatrix} + \frac{1}{\Delta t^2} \begin{bmatrix} -5u_0^j + 4u_0^{j-1} - u_0^{j-2} \\ -5u_1^j + 4u_1^{j-1} - u_1^{j-2} \\ -5u_2^j + 4u_2^{j-1} - u_2^{j-2} \\ \vdots \\ -5u_{n-2}^j + 4u_{n-2}^{j-1} - u_{n-2}^{j-2} \\ -5u_{n-1}^j + 4u_{n-1}^{j-1} - u_{n-1}^{j-2} \\ -5u_n^j + 4u_n^{j-1} - u_n^{j-2} \end{bmatrix}.$$

Os elementos à direita da última igualdade da equação (93) estão na forma mais conveniente para a construção do sistema de equações. O primeiro elemento contém os deslocamentos desconhecidos, que são incógnitas do problema. O segundo elemento apresenta valores de deslocamentos para passos de tempo anteriores, que são conhecidos.

Dadas as condições de contorno e as condições iniciais, a equação (81) pode ser rearranjada num sistema do tipo $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, onde \mathbf{X} contém as incógnitas em $t = t_{j+1}$, a matriz \mathbf{A} contém os coeficientes que multiplicam estas incógnitas e o vetor \mathbf{B} contém os valores conhecidos. Após a solução do sistema, são conhecidos no instante de tempo

$t = t_{j+1}$, o deslocamento, u , para todos os pontos do domínio, juntamente com a rotação, θ , o momento fletor, M , e o esforço cortante, Q , no contorno. Com esses valores, qualquer uma dessas grandezas pode ser calculada para qualquer ponto interno, utilizando as equações (78), (79) e (80), para o instante de tempo $t = t_{j+1}$.

Os valores são calculados com o avanço no tempo, ou seja, o sistema é resolvido para $t = t_1$, depois para $t = t_2$ e assim sucessivamente até $t = t_m$, que é o último passo de tempo da análise. Para $t = t_1$ e $t = t_2$ ($j = 0$ e $j = 1$, respectivamente), surgem deslocamentos em tempos negativos, u_i^{-1} e u_i^{-2} . Seu tratamento foi apresentado na subseção 3.3.2 e, como o deslocamento e a velocidade inicial são sempre nulas neste trabalho, estes deslocamentos são sempre nulos, ou seja, $u_i^{-1} = 0$ e $u_i^{-2} = 0$, para todas as análises.

4 EXEMPLOS NUMÉRICOS

4.1 ORGANIZAÇÃO E APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS

A formulação de Método Elementos de Contorno desenvolvida no Capítulo 3 é aplicada para os quatro tipos de vigas: AA - que tem como vínculos apoios simples nos dois extremos; EE - que tem como vínculos engaste nos dois extremos; EA - que possui engaste na extremidade esquerda e apoio simples na direita; EL - que possui a extremidade da esquerda com engaste e a direita é livre. Para o caso estático, são apresentados os resultados dessa formulação juntamente com a solução analítica, citadas no Capítulo 2 e contidas no Apêndice 1, e as soluções numéricas com o Método das Diferenças Finitas, MDF. Já para o caso dinâmico não há solução analítica conhecida e, por isso, os resultados foram mostrados juntamente com a solução do MDF, que serviu como comparativo. A formulação para o MDF foi apresentada na primeira parte do Capítulo 3.

Para todas as vigas foram adotadas características de material e da geometria constantes, indicadas na Tabela 11. O comprimento de cada viga analisada está indicado na Tabela 12. Os carregamentos aplicados são o concentrado ou o distribuído. Os valores utilizados estão apresentados na Tabela 13. O valor de coeficiente de mola que representa a base elástica é constante e igual a $\kappa = 4,0\text{E}+6 \text{ N/m}^2$ para todas as análises. Para a notação das potências de base 10, foi adotada a letra E seguida do expoente, por exemplo: $1,0\text{E}-1 = 1,0 \times 10^{-1}$.

Todas as formulações foram implementadas computacionalmente na linguagem Fortran e os códigos escritos estão no Apêndice 6. Apesar das respostas serem obtidas de forma numérica, o resultado obtido foi apresentado em forma de gráfico. Três configurações de carregamento foram avaliadas: estático, gradual e instantâneo. As subseções seguintes apresentam os respectivos detalhes.

TABELA 11 – PROPRIEDADES DO MATERIAL E DA GEOMETRIA DAS VIGAS ANALISADAS

Propriedade	Símbolo	Valor	Unidade
Área da seção transversal	A	0,09	m^2
Inércia da seção transversal	I	$1,251875\text{E}-3$	m^4
Módulo de elasticidade	E	$3,0\text{E}+10$	N/m^2
Densidade do material	ρ	2.400	kg/m^3

Fonte: O autor (2017).

TABELA 12 – COMPRIMENTO DAS VIGAS ANALISADAS

Tipo de viga	L	Unidade
AA	4,0	m
EE	4,0	m
EA	4,0	m
EL	2,0	m

Fonte: O autor (2017).

TABELA 13 – VALOR FINAL DA CARGA E LOCAL DE APLICAÇÃO NAS VIGAS ANALISADAS

Tipo de viga	Carga	Valor	Unidade	Local de aplicação
AA	Concentrada	$1,0\text{E}+5$	N	$x = 3L/4$
EE	Concentrada	$1,0\text{E}+5$	N	$x = 3L/4$
EA	Concentrada	$1,0\text{E}+5$	N	$x = 3L/4$
EL	Concentrada	$1,0\text{E}+5$	N	$x = L$
AA	Distribuída	$5,0\text{E}+4$	N/m	Ao longo de toda a viga
EE	Distribuída	$5,0\text{E}+4$	N/m	Ao longo de toda a viga
EA	Distribuída	$5,0\text{E}+4$	N/m	Ao longo de toda a viga
EL	Distribuída	$5,0\text{E}+4$	N/m	Ao longo de toda a viga

Fonte: O autor (2017).

4.1.1 Resultados para carregamento estático

Utilizando a formulação desenvolvida no Capítulo 3 para o caso estático, foram calculados os deslocamentos, rotações, momentos fletores e esforços cortantes para os dois pontos do contorno e para alguns pontos dentro do domínio da viga.

Para a formulação estática do Método dos Elementos de Contorno, MEC, são somente quatro incógnitas do problema, que são os valores desconhecidos no contorno. O sistema a ser resolvido, para cada tipo de viga e carregamento, é o apresentado em (47). Após resolver o problema para estes quatro valores, é possível calcular, para um ponto interno qualquer: o deslocamento, com a equação (40); a rotação, com (44); o momento fletor, com (45); e o esforço cortante, com a equação (46). Para o MEC, são apresentados resultados para 19 pontos internos.

Para o Método das Diferenças Finitas, é necessária a discretização do domínio. A discretização para o caso estático foi feita dividindo a viga em 161 nós para as vigas AA, EE, EA e 81 nós para a viga EL, resultando assim em pontos distantes de 0,025m. Os deslocamentos para os nós da discretização precisam ser calculados de maneira simultânea, resultando em matrizes de dimensão praticamente igual ao número de nós da discretização (não é igual porque os apoios com deslocamentos conhecidos não entram no cálculo). O sistema a ser resolvido é o apresentado na subseção 3.1.1. Tendo os deslocamentos calculados, basta fazer substituições simples nas equações apresentadas nas Tabelas 6, 7 e 8 para calcular a rotação, o momento fletor e o esforço cortante para qualquer ponto interno. Apesar do grande número de nós, foram apresentados os resultados para os mesmos pontos calculados com o MEC.

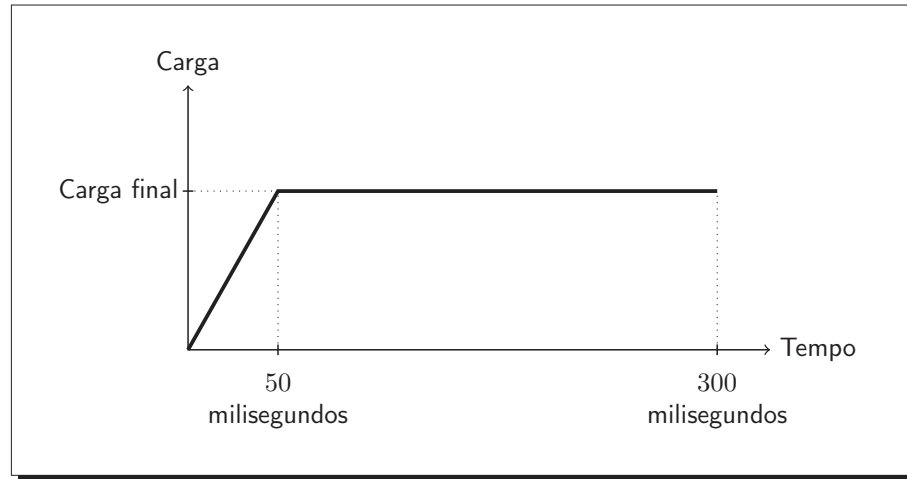
A solução apresentada pelos dois métodos numéricos foi comparada com a solução analítica, comentada no Capítulo 2 e detalhada nos Apêndice 1. Como ela é contínua, foi representada com a linha cheia nas Figuras com os resultados. As Figuras 7, 9, 11 e 13 apresentam as soluções para a carga concentrada. Já as Figuras 8, 10, 12 e 14 apresentam as soluções para a carga distribuída.

4.1.2 Resultados para carregamento gradual

O Capítulo 3 desenvolveu além de formulações para o caso estático, a formulação MEC-D e a MDF para o caso dinâmico de vigas sobre base elástica. No desenvolvimento das formulações, o carregamento não sofreu nenhuma restrição, podendo ser variável no tempo e no espaço. Assim, o carregamento considerado aqui variou no tempo. De 0 até 50 milisegun-

dos, ele variou linearmente, partindo de um carregamento nulo até atingir o valor indicado na Tabela 13, que foi mantido até o fim da análise. O tempo total de análise foi de 300 milissegundos. A Figura 5 mostra a representação gráfica deste carregamento.

FIGURA 5 – REPRESENTAÇÃO DO CARREGAMENTO GRADUAL



FONTE: O autor (2017).

Para o MEC-D, é necessária uma discretização de domínio e, como o Método de Houbolt é utilizado para calcular a aceleração, uma discretização temporal também. A discretização do domínio é feita por células de tamanho constantes e a discretização temporal, por intervalos de tempo constantes. Para cada passo de tempo, é preciso calcular os valores incógnitos do contorno e o deslocamento dos pontos internos, coincidentes com os extremos das células da discretização. A solução apresentada neste trabalho foi obtida com 80 células para as vigas AA, EE e EA e 40 células para as vigas EL, o que resulta em células de tamanho igual a 0,05m. O passo de tempo escolhido foi $\Delta t = 1,0E-5s$, resultando em 30.000 passos de tempo. Após a solução de cada passo de tempo, já é possível calcular as demais variáveis incógnitas para o domínio da viga, ou seja: a rotação, com a equação (78); o momento fletor, com (79); e o esforço cortante, com (80).

Para o MDF, a discretização é inerente ao método. Foram utilizados 161 nós para as vigas AA, EE e EA e 81 nós para as vigas EL, com a distância entre os nós igual a 0,025m. O passo de tempo escolhido foi igual a $\Delta t = 1,0E-7s$, resultando em 3.000.000 passos de tempo. Após o cálculo dos deslocamentos de um passo de tempo, já é possível calcular, para o mesmo passo de tempo, a rotação, o momento fletor e o esforço cortante para qualquer

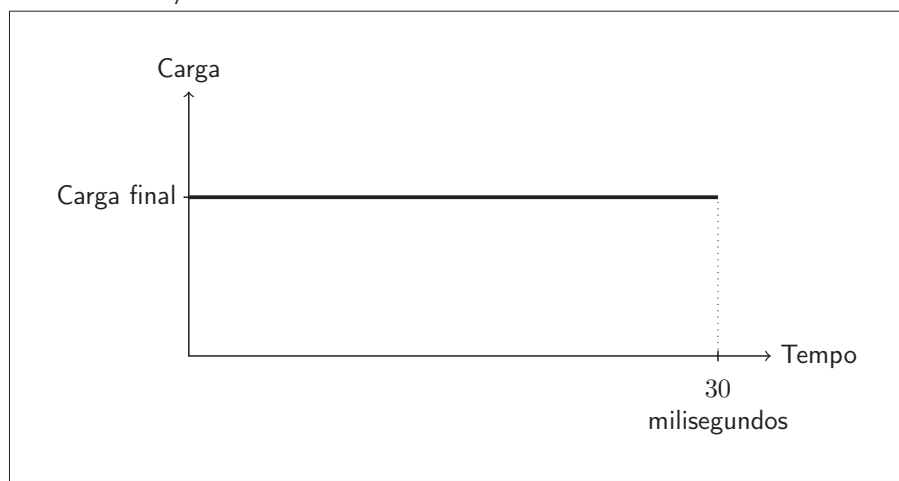
ponto interno com as equações apresentadas nas Tabelas 6, 7 e 8.

As Figuras 15, 16, 17 e 18 apresentam as soluções para a carga concentrada. Já as Figuras 19, 20, 21 e 22 apresentam as soluções para a carga distribuída. Cada uma destas oito figuras contém oito gráficos, onde os quatro primeiros contém o valor calculado das variáveis de contorno não prescritas pelos vínculos e os quatro últimos apresentam o valor do deslocamento, rotação, momento fletor e esforço cortante para um ponto interno. Apesar de ser utilizado 30.000 passos de tempo na solução do MEC-D, foram impressas somente 51 respostas em cada gráfico, igualmente espaçadas no tempo. Os resultados com o MDF estão traçados com linha contínua, mas é importante frisar que as soluções são obtidas somente para um conjunto discreto de pontos.

4.1.3 Resultados para carregamento instantâneo

A subseção anterior mostrou o caso de um carregamento que cresce até estabilizar num valor final. Nesta subseção, o carregamento é instantâneo, ou seja, no instante inicial do problema ele já está com o valor final indicado na Tabela 13. O tempo total utilizado para estas soluções é 30 milissegundos. Uma representação gráfica deste carregamento pode ser vista na Figura 6.

FIGURA 6 – REPRESENTAÇÃO DO CARREGAMENTO INSTANTÂNEO



FONTE: O autor (2017).

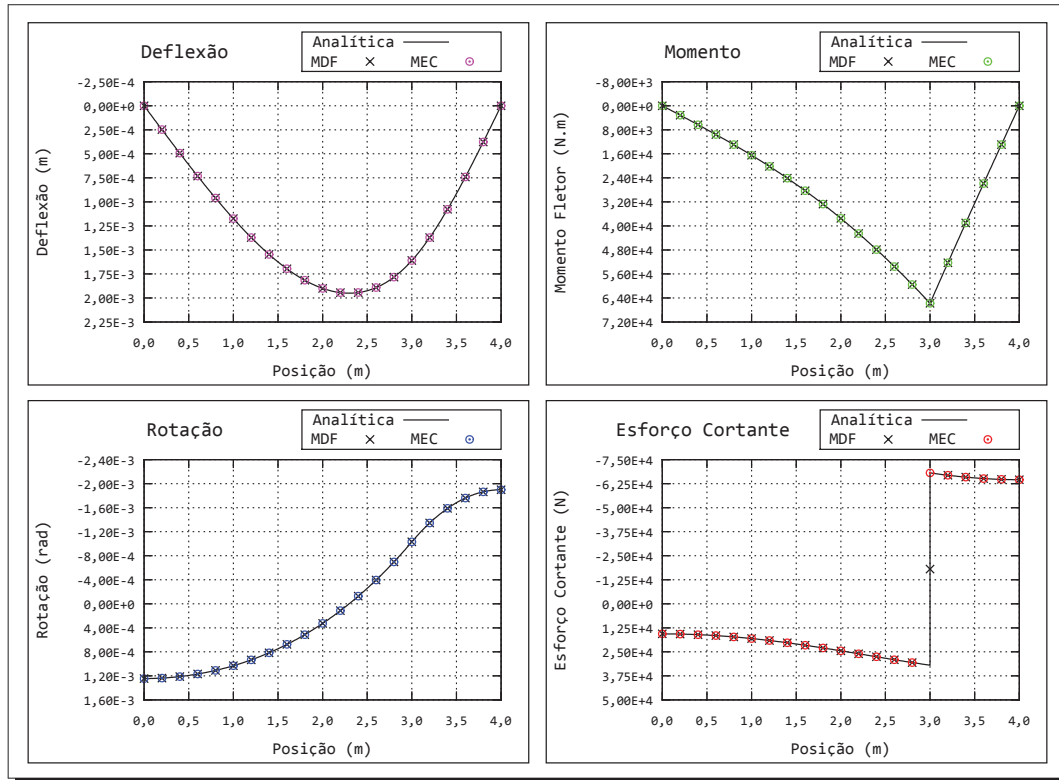
Para o MEC-D, foi usado o mesmo número de células indicados na subseção anterior, ou seja, 80 para as vigas AA, EE e EA e 40 para as vigas EL. Porém, o intervalo de tempo utilizado foi de $\Delta t = 1,0E-6s$, resultando em 30.000 passos de tempo .

Para o MDF também foi mantido o número de nós citados na subseção anterior, isto é, 161 nós para as vigas AA, EE e EA e 81 nós para as vigas EL. Analogamente, foi mantido o mesmo intervalo de tempo, $\Delta t = 1,0E-7s$, mas resultado em 300.000 passos de tempo.

Como nos resultados da subseção anterior, os resultados obtidos com o MDF estão traçados com linha contínua, mas as respostas são obtidas somente para um conjunto discreto de pontos. Já para o MEC-D, foram selecionadas somente 51 respostas igualmente espaçadas no tempo.

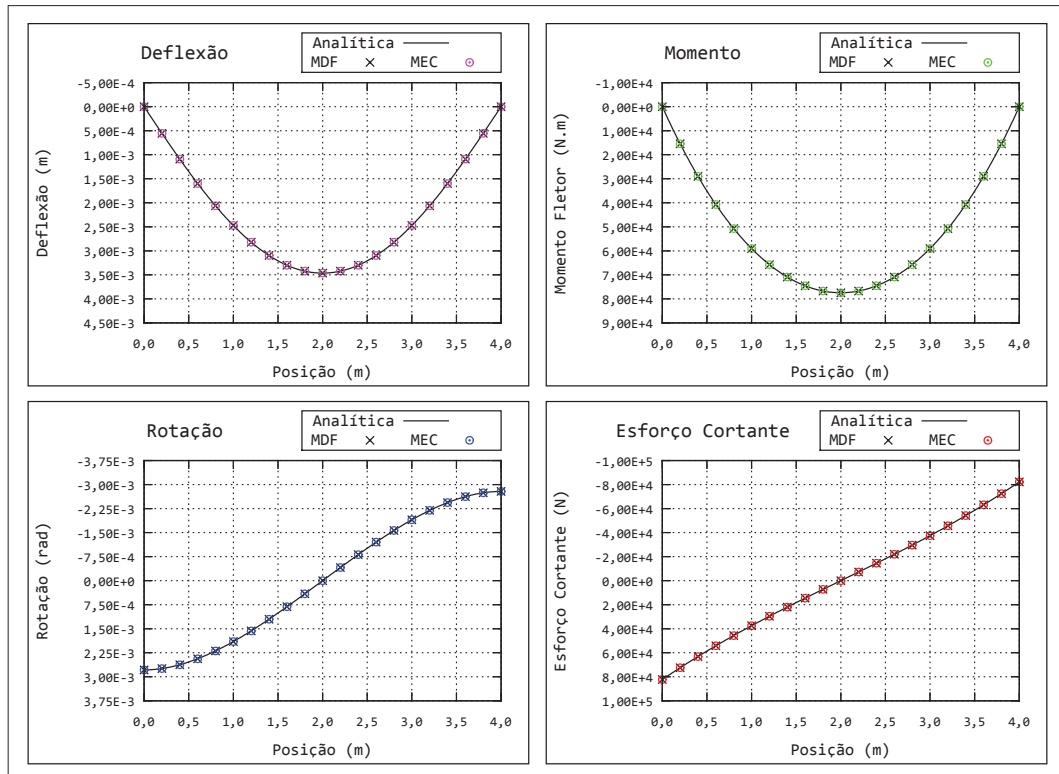
As Figuras 23, 24, 25 e 26 apresentam as soluções para a carga concentrada. Já as Figuras 27, 28, 29 e 30 apresentam as soluções para a carga distribuída. Os gráficos contidos nessas Figuras foram organizados como os da resposta para carregamento aplicado gradualmente, ou seja, os quatro primeiros contém o valor calculado das variáveis de contorno não prescritas pelos vínculos e os quatro últimos apresentam o valor do deslocamento, rotação, momento fletor e esforço cortante para um ponto interno.

FIGURA 7 – RESULTADOS PARA VIGA AA COM CARGA CONCENTRADA - CARREGAMENTO ESTÁTICO



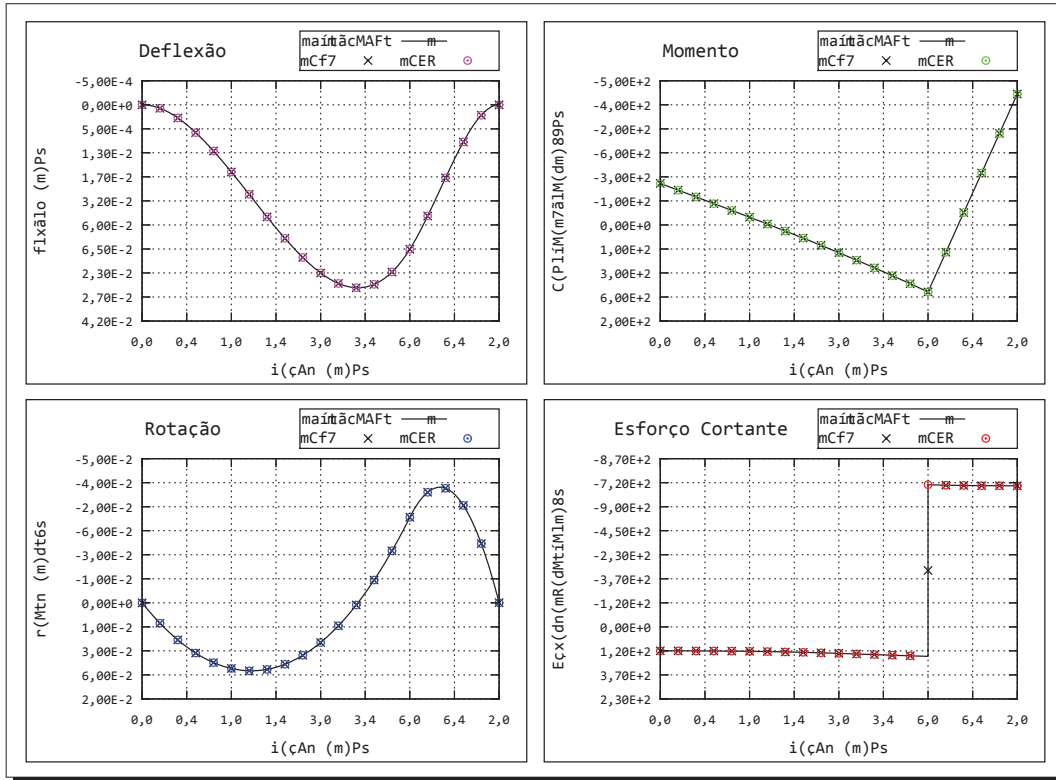
FONTE: O autor (2017).

FIGURA 8 – RESULTADOS PARA VIGA AA COM CARGA DISTRIBUÍDA - CARREGAMENTO ESTÁTICO



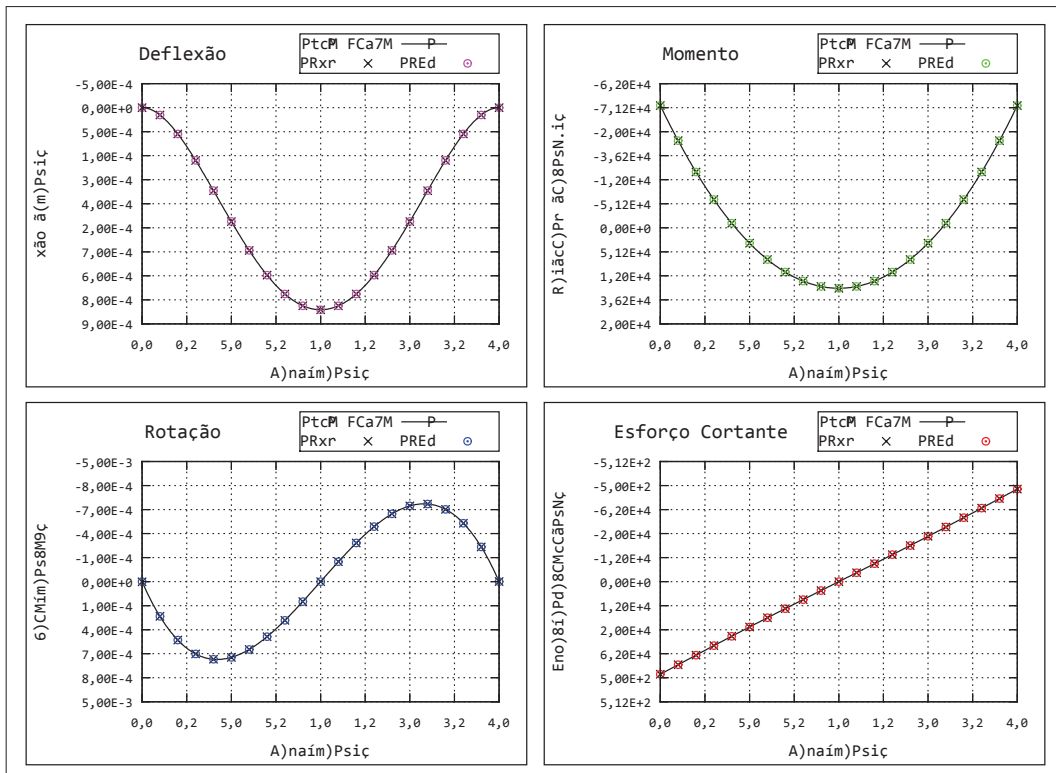
FONTE: O autor (2017).

FIGURA 9 – RESULTADOS PARA VIGA EE COM CARGA CONCENTRADA - CARREGAMENTO ESTATICO



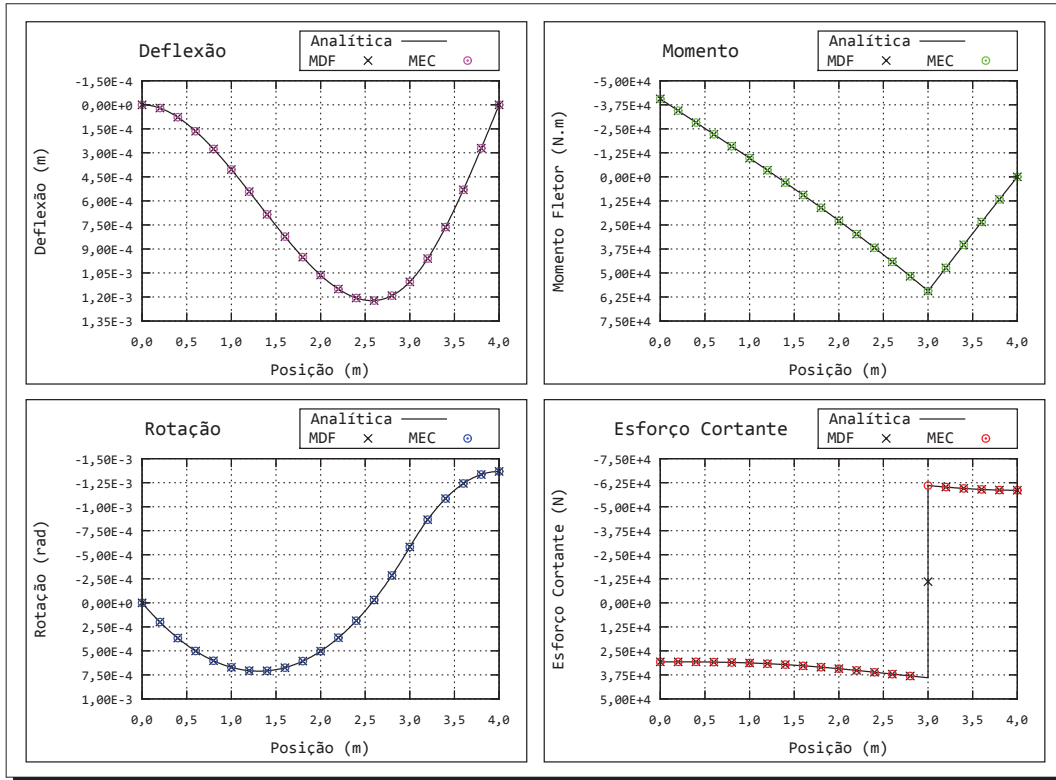
FONTE: O autor (2017).

FIGURA 10 – RESULTADOS PARA VIGA EE COM CARGA DISTRIBUÍDA - CARREGAMENTO ESTATICO



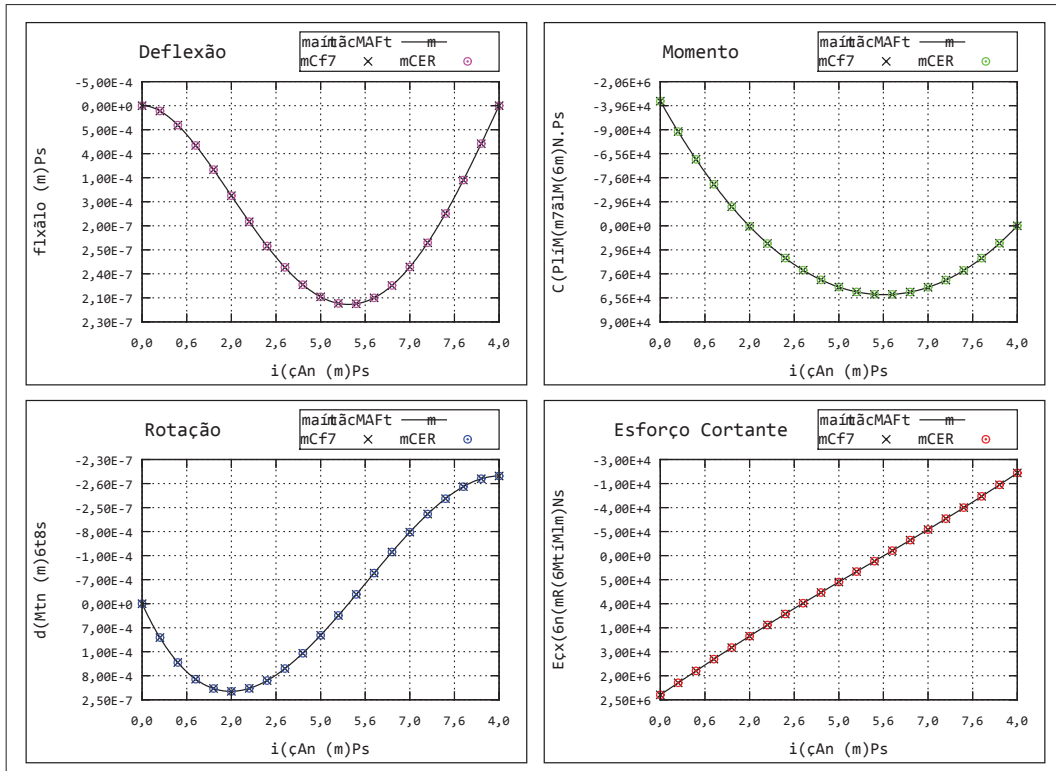
FONTE: O autor (2017).

FIGURA 11 – RESULTADOS PARA VIGA EA COM CARGA CONCENTRADA - CARREGAMENTO ESTÁTICO



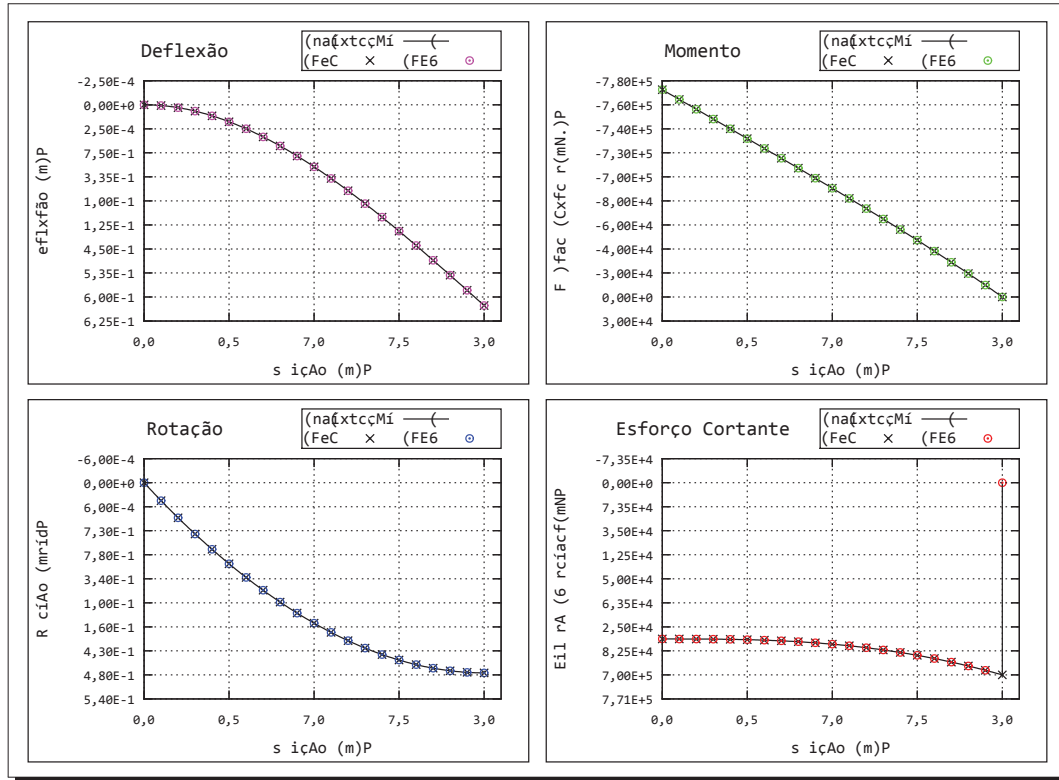
FONTE: O autor (2017).

FIGURA 12 – RESULTADOS PARA VIGA EA COM CARGA DISTRIBUÍDA - CARREGAMENTO ESTÁTICO



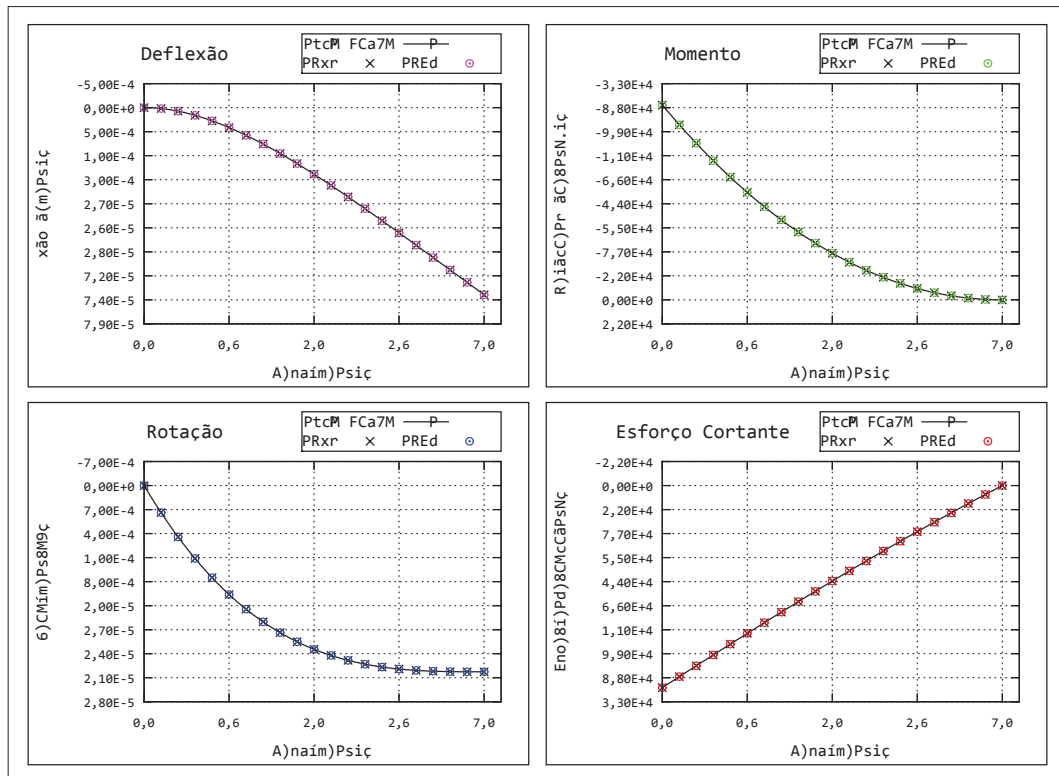
FONTE: O autor (2017).

FIGURA 13 – RESULTADOS PARA VIGA EL COM CARGA CONCENTRADA - CARREGAMENTO ESTATICO



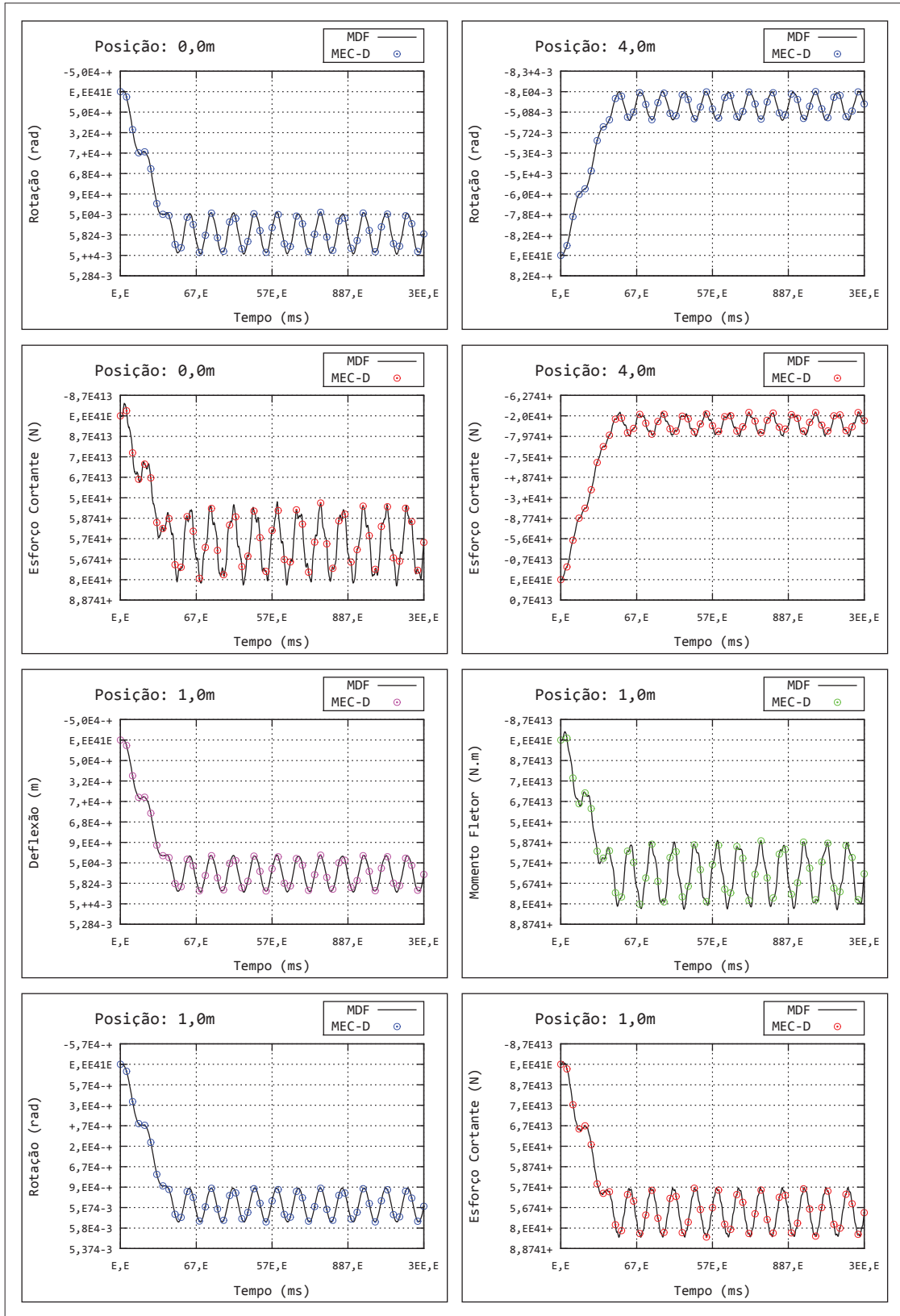
FONTE: O autor (2017).

FIGURA 14 – RESULTADOS PARA VIGA EL COM CARGA DISTRIBUÍDA - CARREGAMENTO ESTATICO



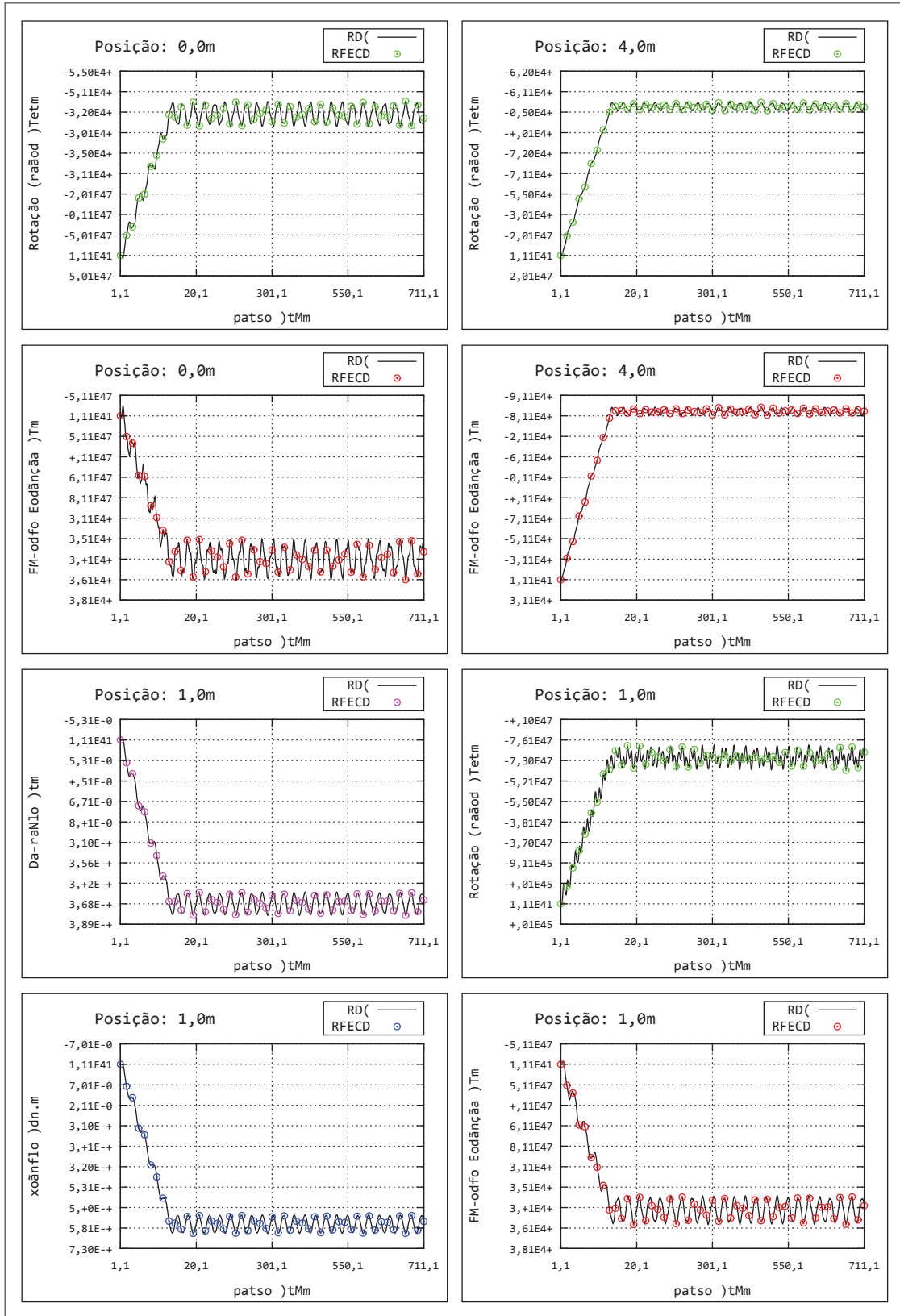
FONTE: O autor (2017).

FIGURA 15 – RESULTADOS PARA VIGA AA COM CARGA CONCENTRADA - CARREGAMENTO TOTAL EM 50 MILISEGUNDOS



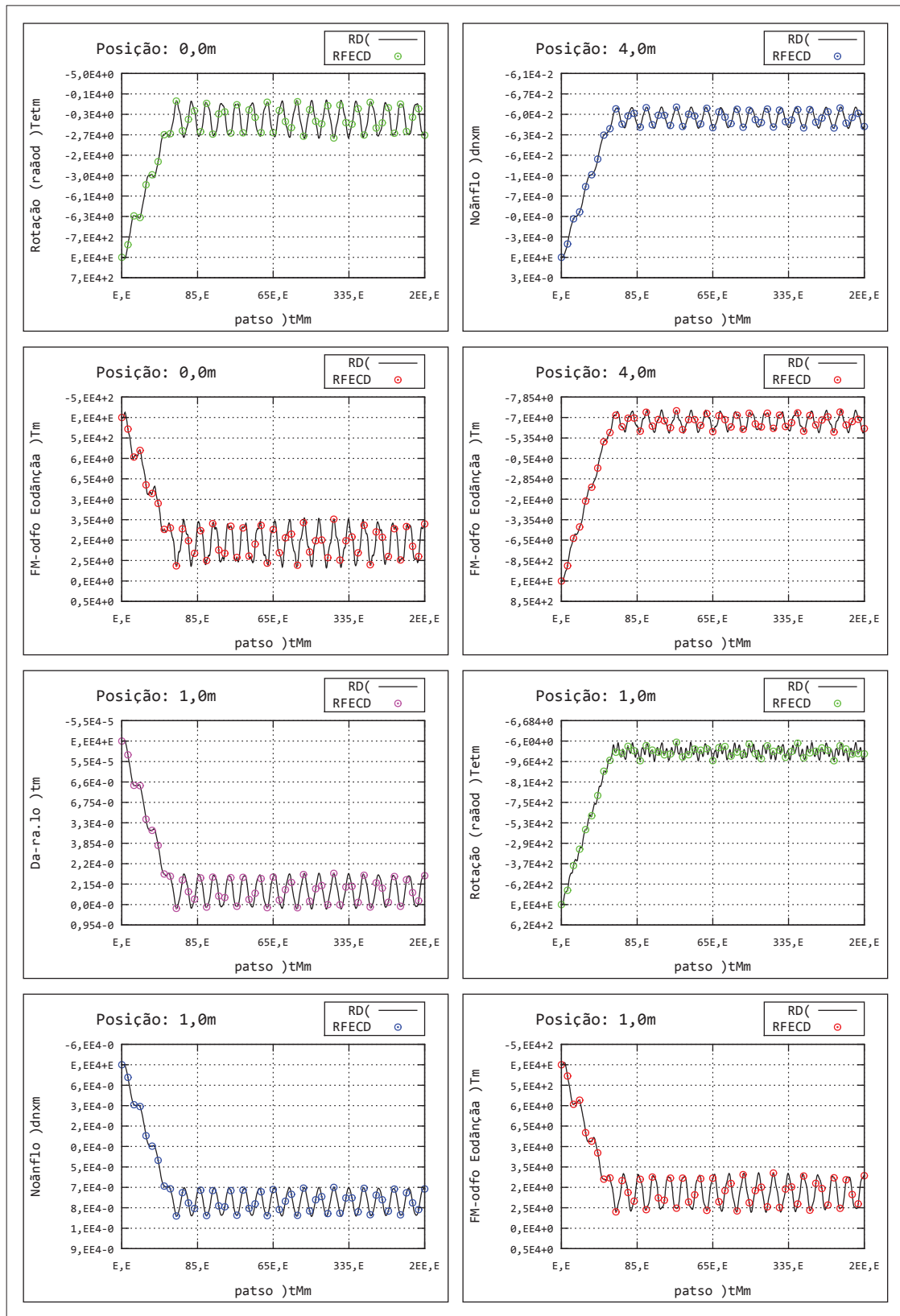
FONTE: O autor (2017).

FIGURA 16 – RESULTADOS PARA VIGA EE COM CARGA CONCENTRADA - CARREGAMENTO TOTAL EM 50 MILISEGUNDOS



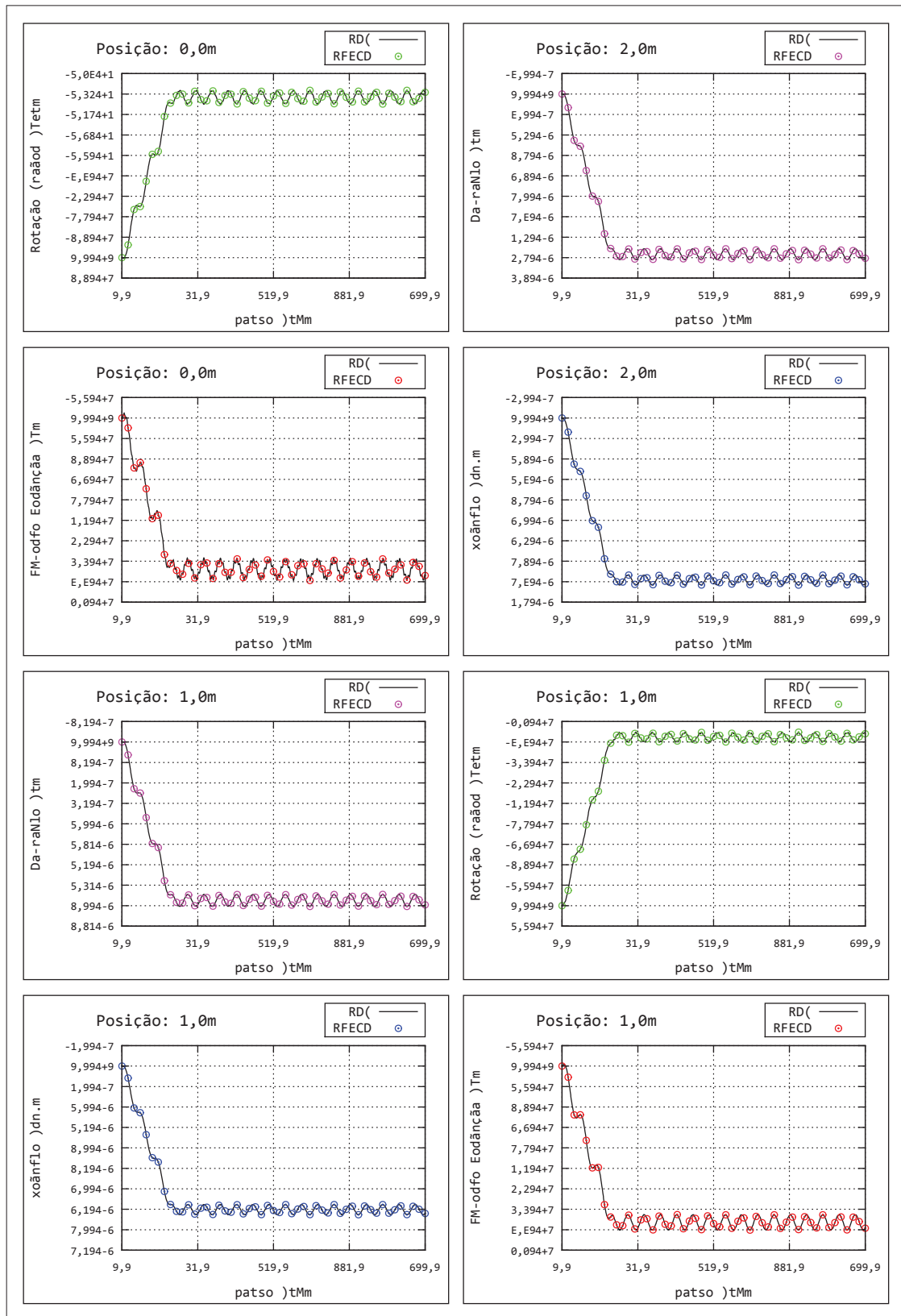
FONTE: O autor (2017).

FIGURA 17 – RESULTADOS PARA VIGA EA COM CARGA CONCENTRADA - CARREGAMENTO TOTAL EM 50 MILISEGUNDOS



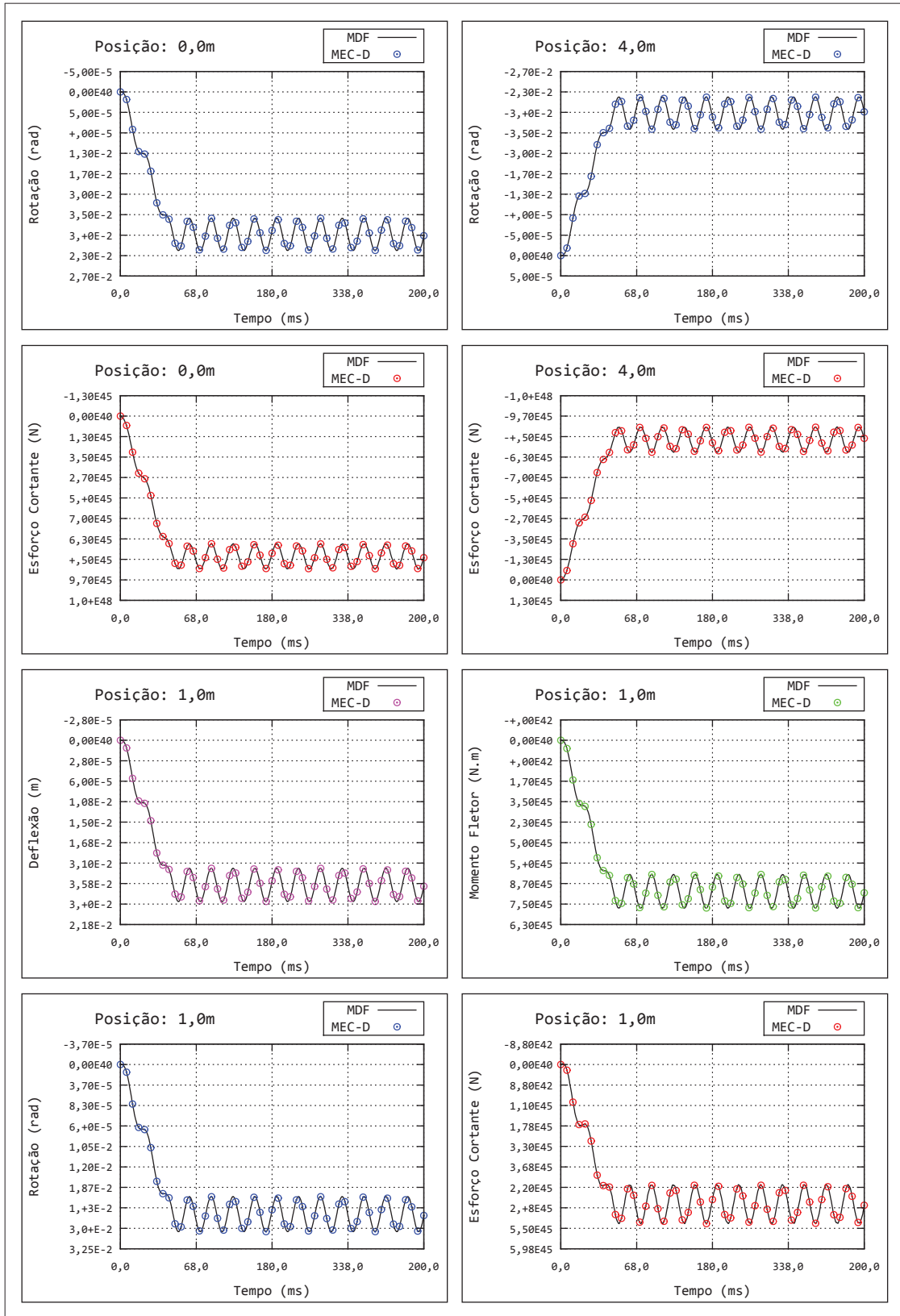
FONTE: O autor (2017).

FIGURA 18 – RESULTADOS PARA VIGA EL COM CARGA CONCENTRADA - CARREGAMENTO TOTAL EM 50 MILISEGUNDOS



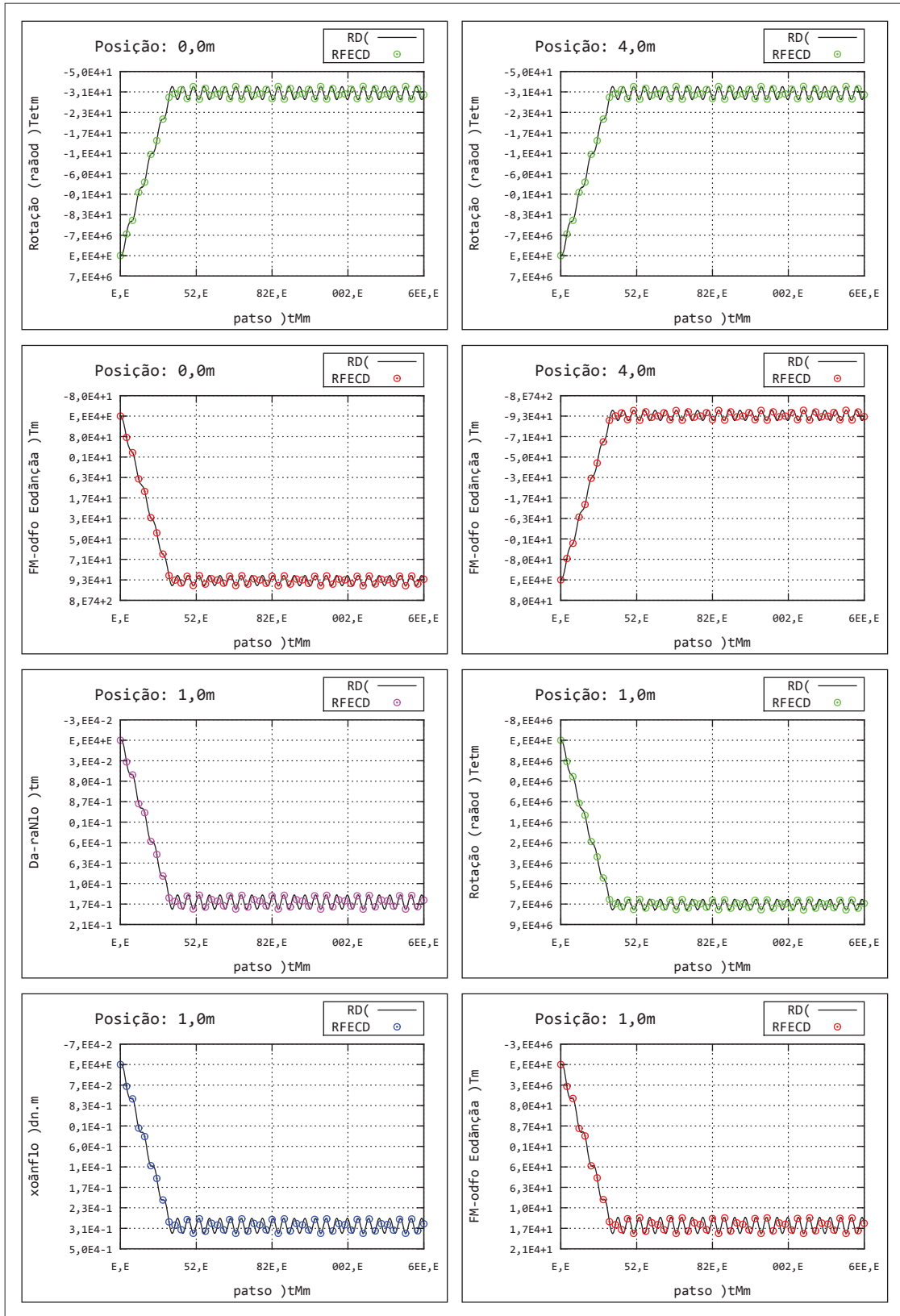
FONTE: O autor (2017).

FIGURA 19 – RESULTADOS PARA VIGA AA COM CARGA DISTRIBUÍDA - CARREGAMENTO TOTAL EM 50 MILISEGUNDOS



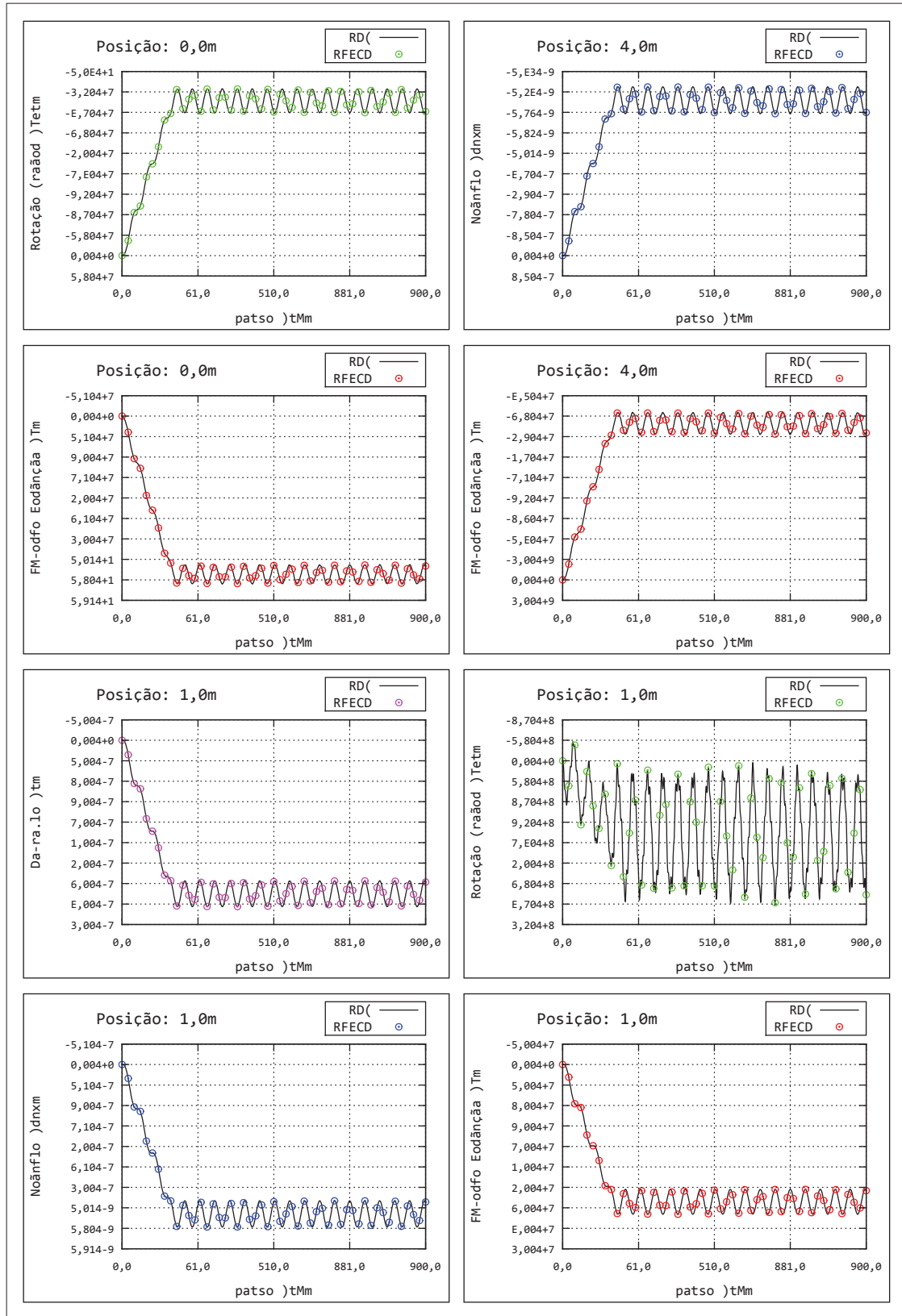
FONTE: O autor (2017).

FIGURA 20 – RESULTADOS PARA VIGA EE COM CARGA DISTRIBUÍDA - CARREGAMENTO TOTAL EM 50 MILISEGUNDOS



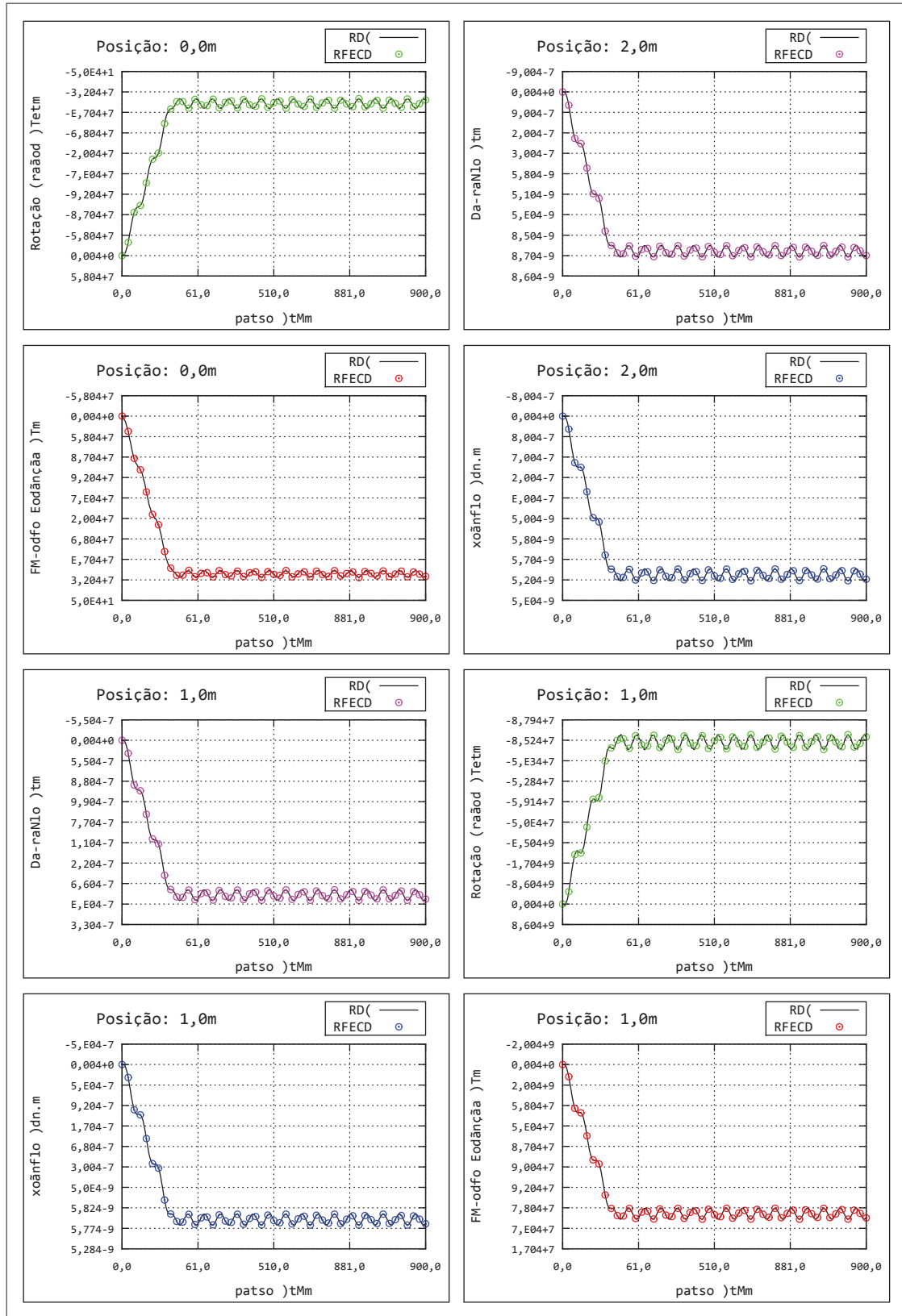
FONTE: O autor (2017).

FIGURA 21 – RESULTADOS PARA VIGA EA COM CARGA DISTRIBUÍDA - CARREGAMENTO TOTAL EM 50 MILISEGUNDOS



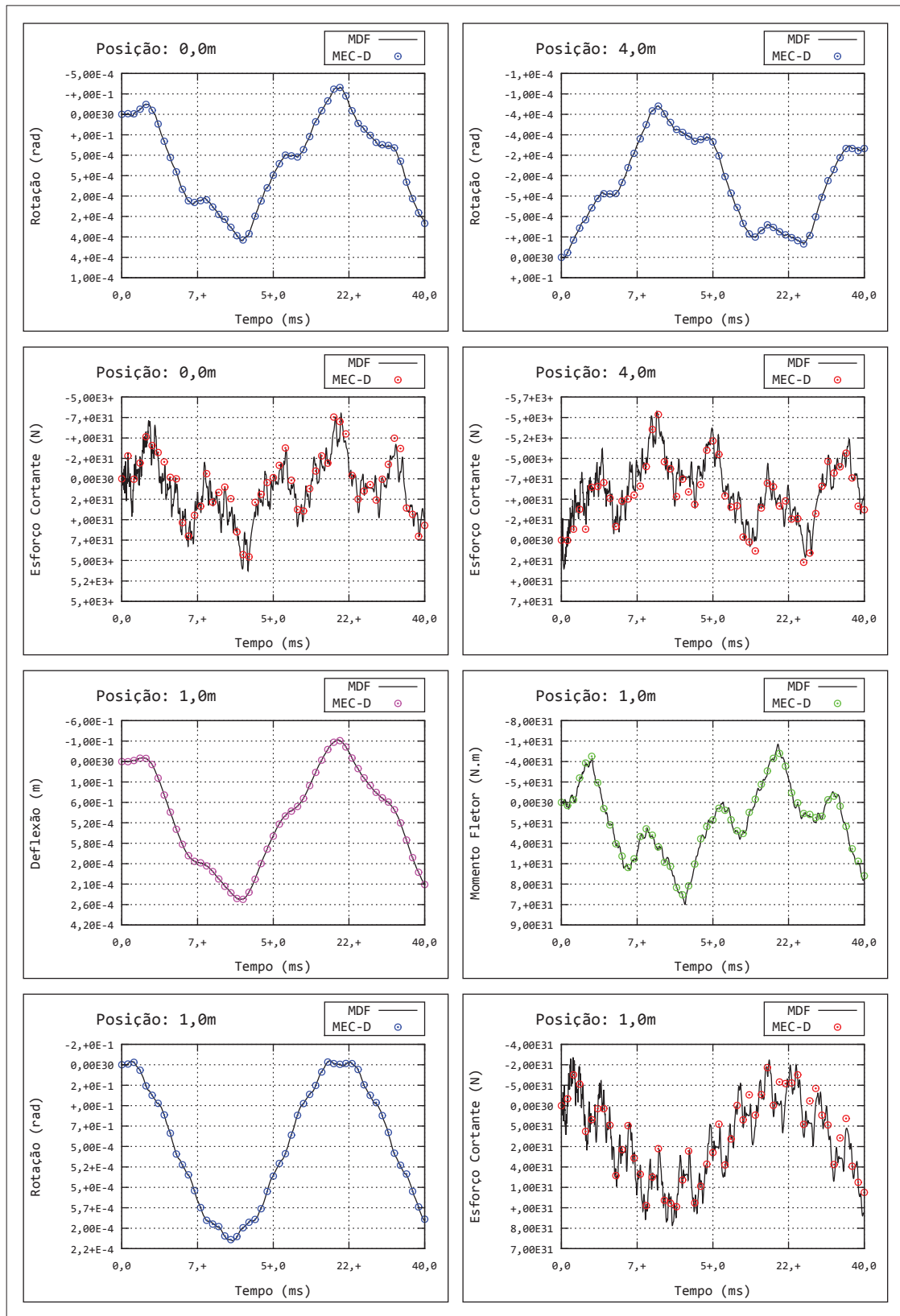
FONTE: O autor (2017).

FIGURA 22 – RESULTADOS PARA VIGA EL COM CARGA DISTRIBUÍDA - CARREGAMENTO TOTAL EM 50 MILISEGUNDOS



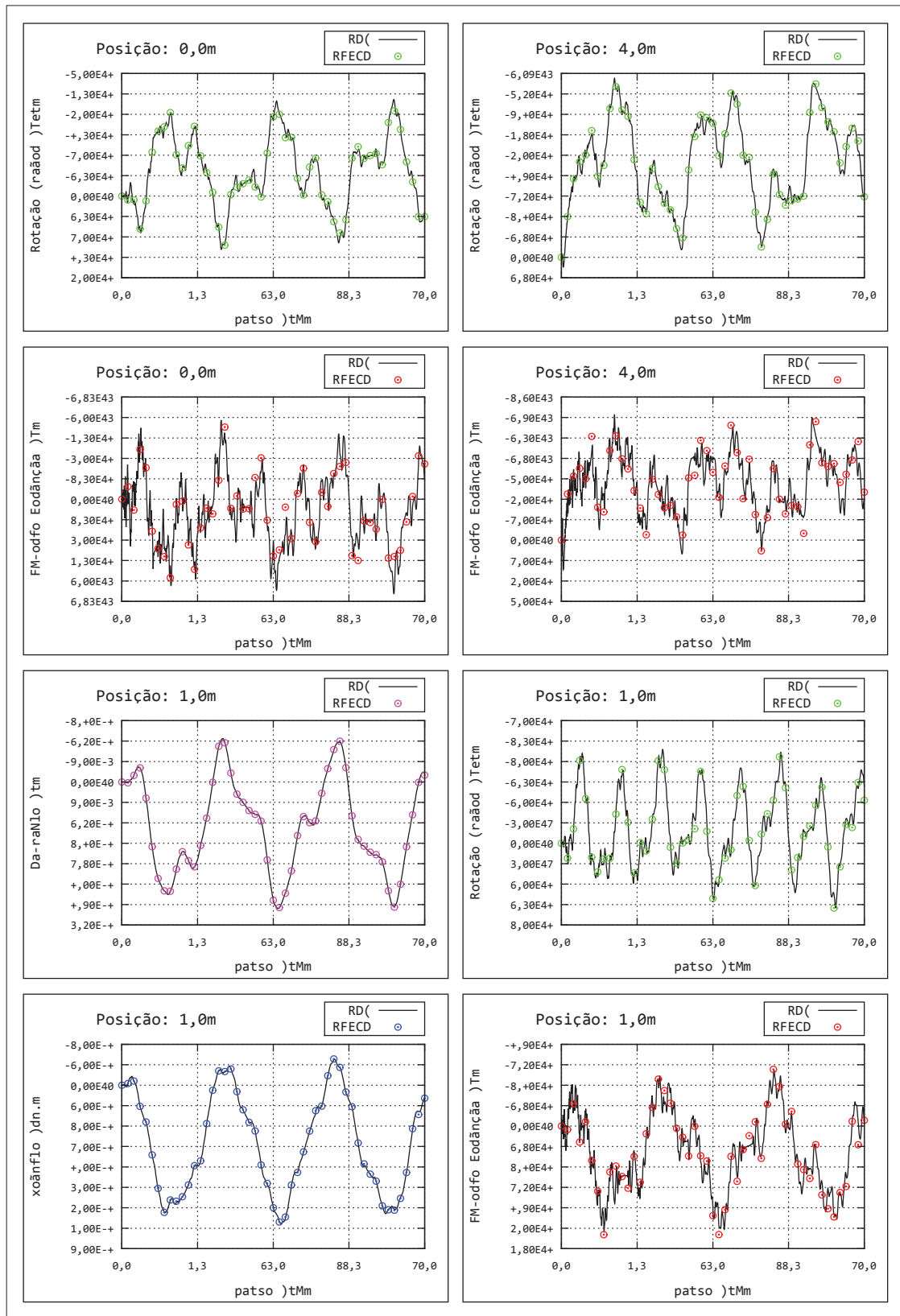
FONTE: O autor (2017).

FIGURA 23 – RESULTADOS PARA VIGA AA COM CARGA CONCENTRADA - CARREGAMENTO INSTANTÂNEO



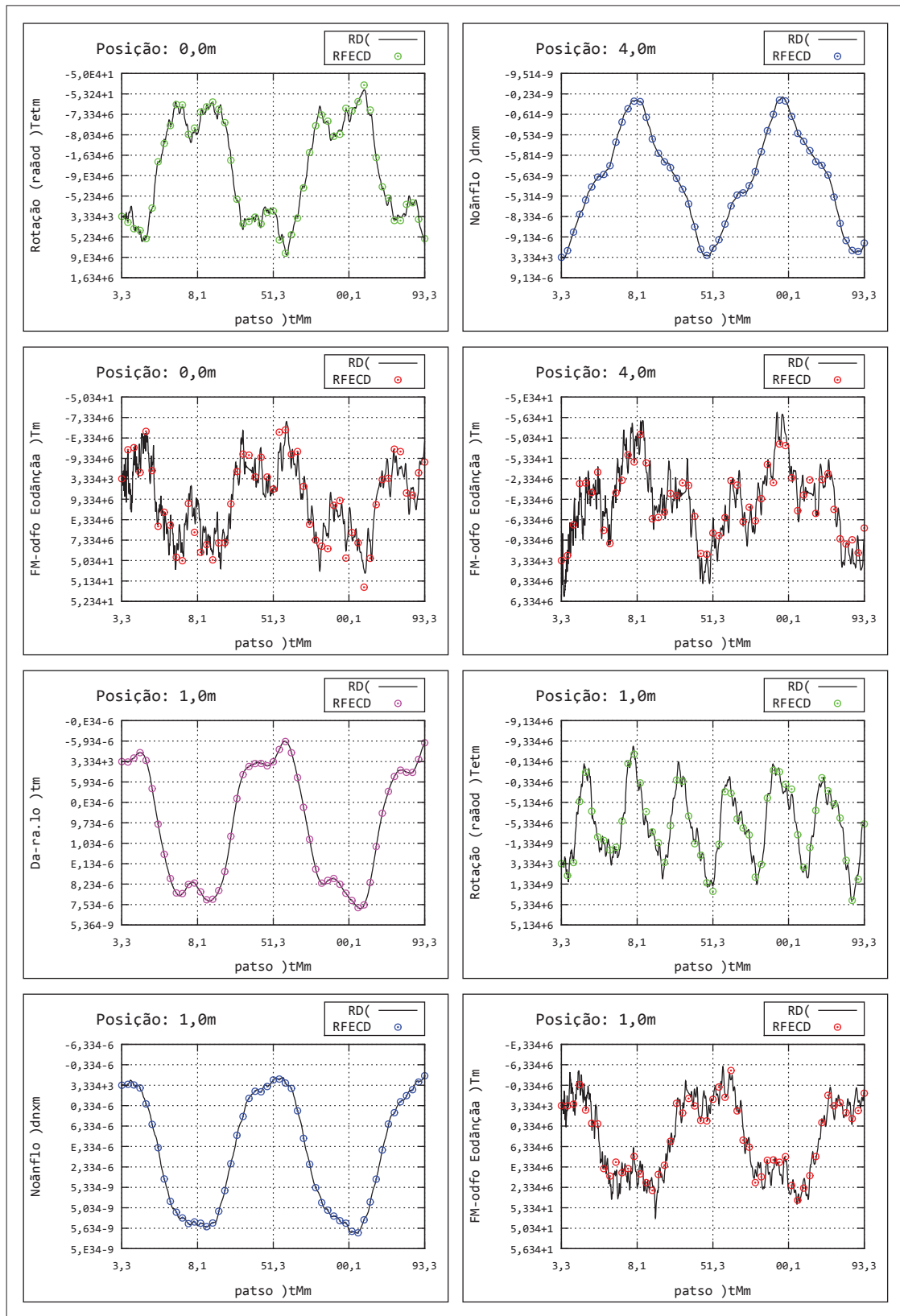
FONTE: O autor (2017).

FIGURA 24 – RESULTADOS PARA VIGA EE COM CARGA CONCENTRADA - CARREGAMENTO INSTANTÂNEO



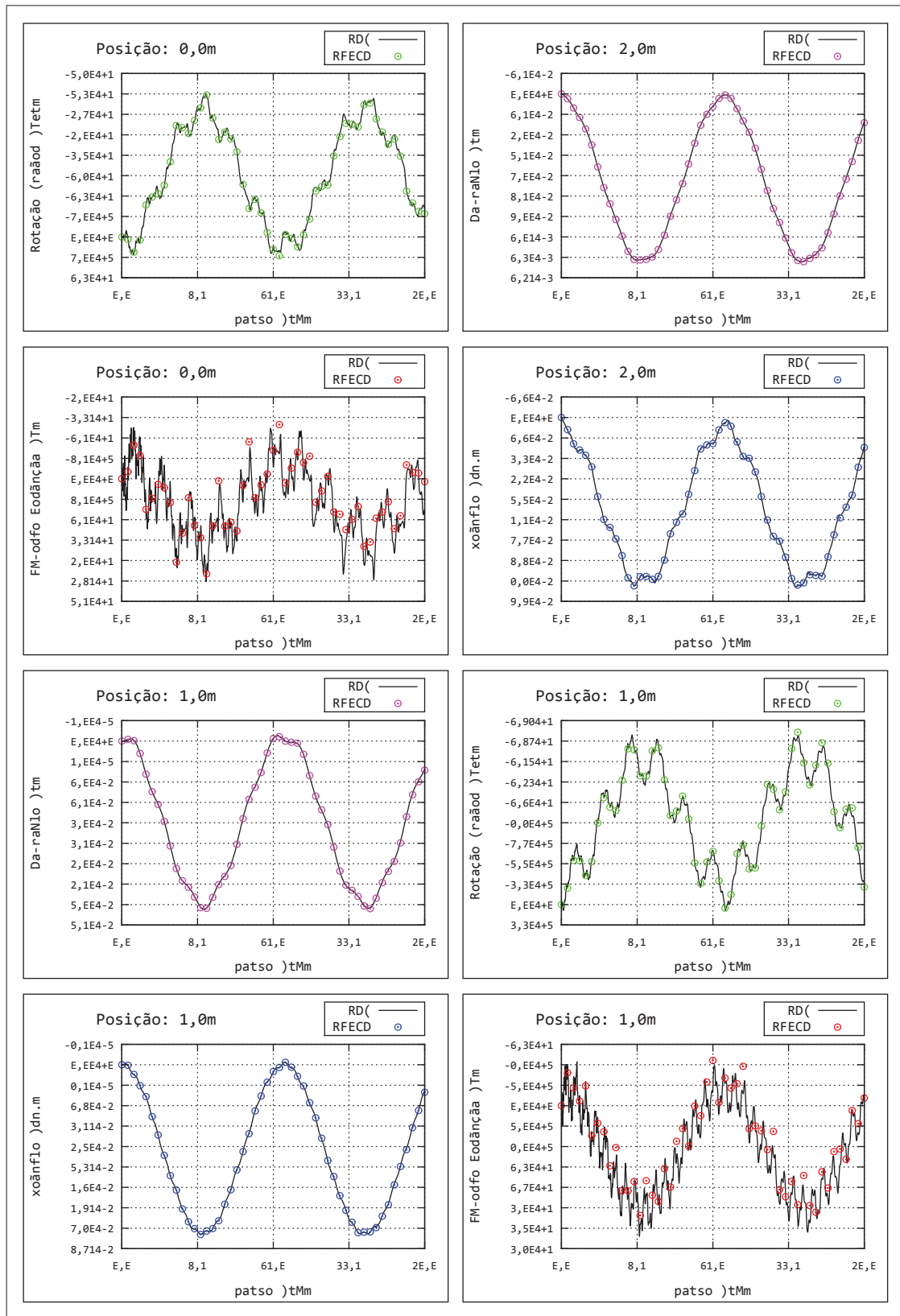
FONTE: O autor (2017).

FIGURA 25 – RESULTADOS PARA VIGA EA COM CARGA CONCENTRADA - CARREGAMENTO INSTANTÂNEO



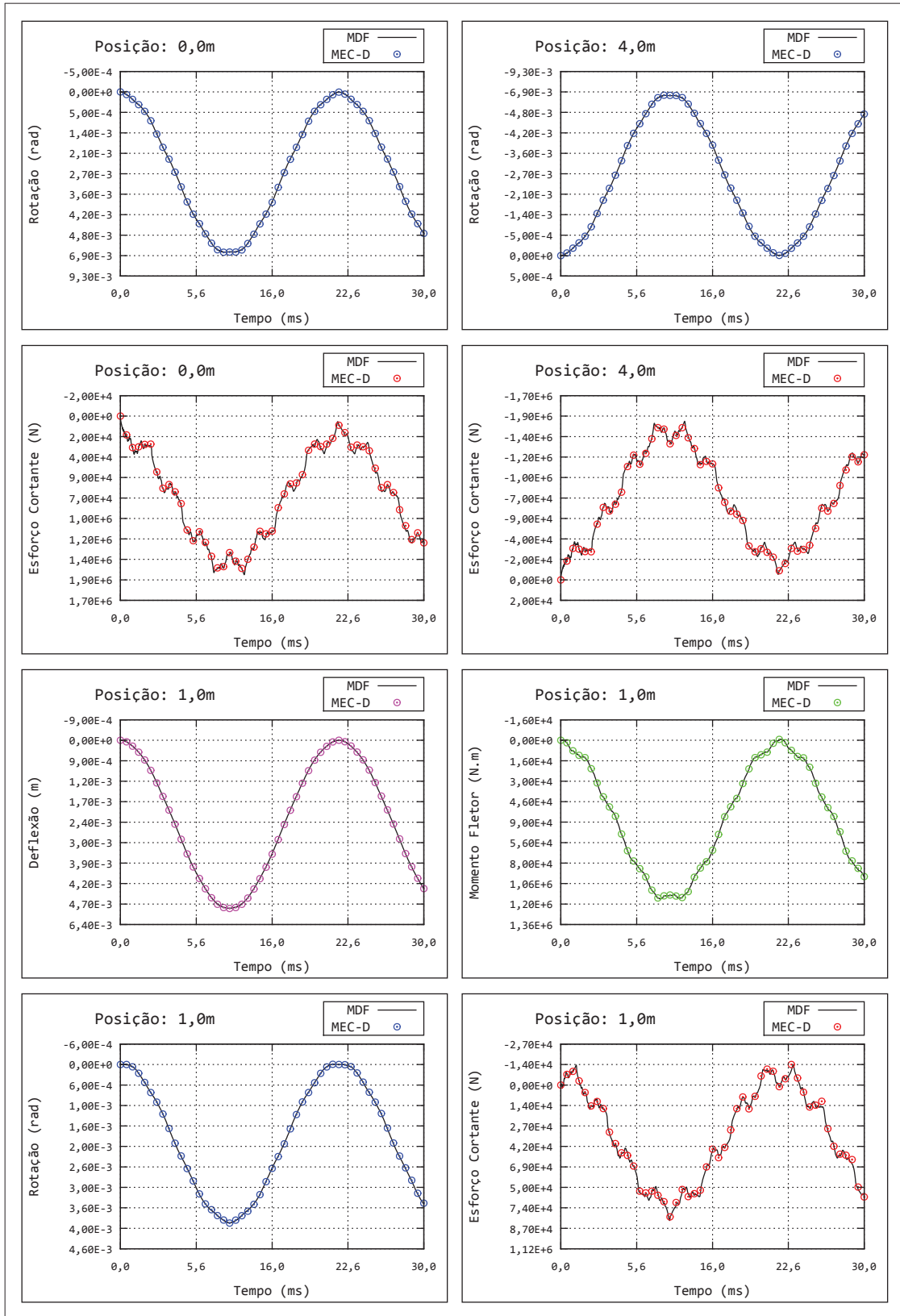
FONTE: O autor (2017).

FIGURA 26 – RESULTADOS PARA VIGA EL COM CARGA CONCENTRADA - CARREGAMENTO INSTANTÂNEO



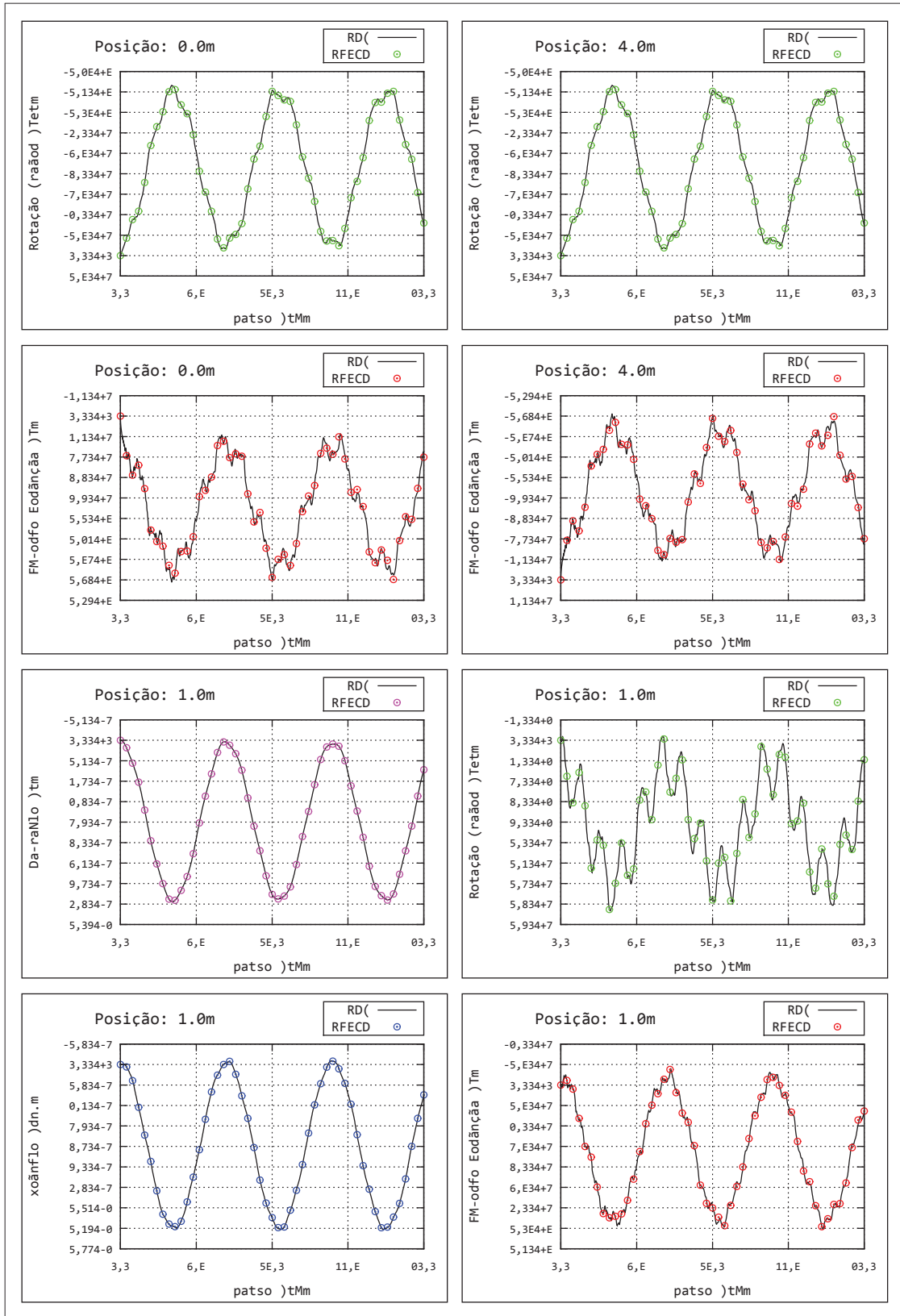
FONTE: O autor (2017).

FIGURA 27 – RESULTADOS PARA VIGA AA COM CARGA DISTRIBUÍDA - CARREGAMENTO INSTANTÂNEO



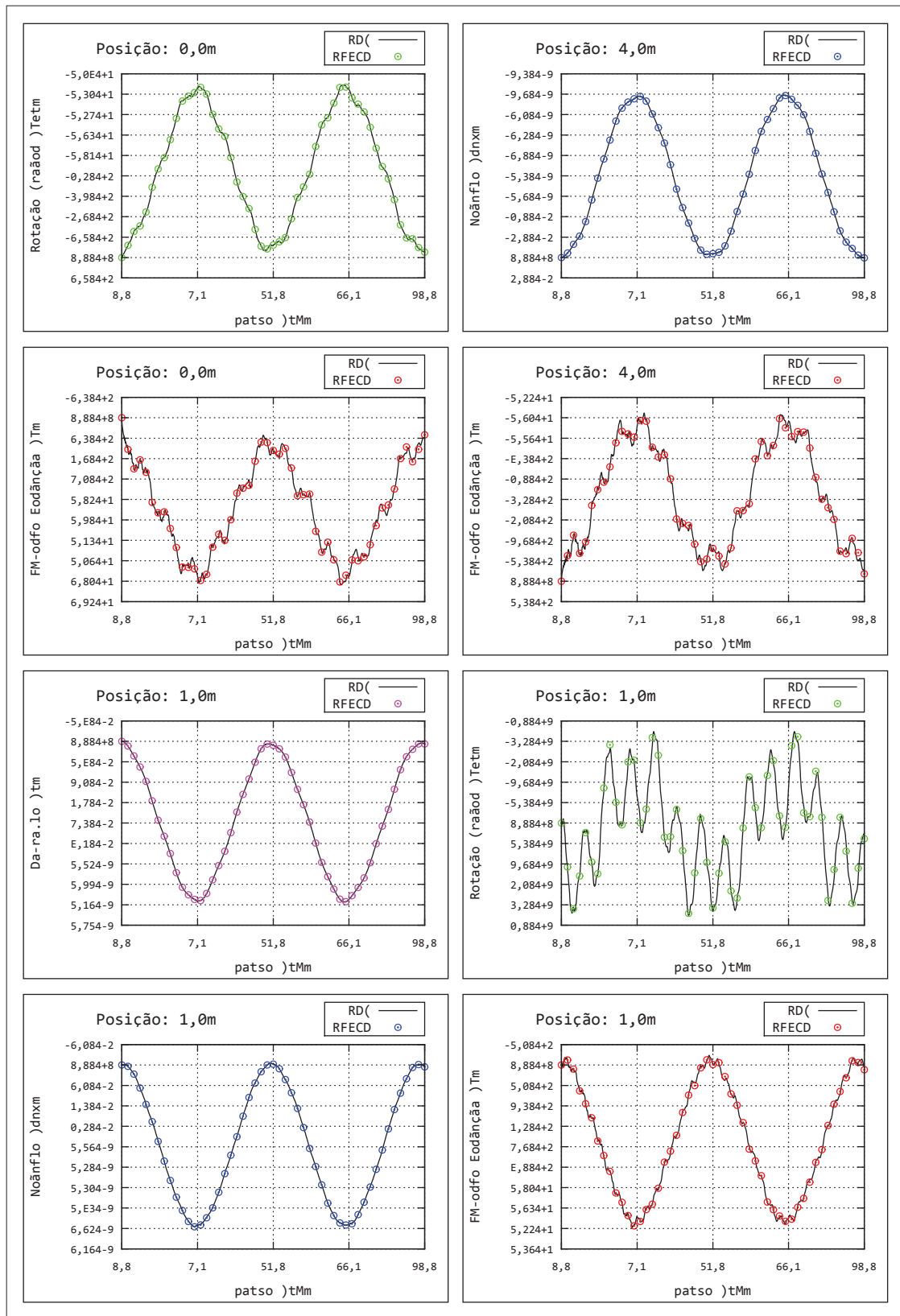
FONTE: O autor (2017).

FIGURA 28 – RESULTADOS PARA VIGA EE COM CARGA DISTRIBUÍDA - CARREGAMENTO INSTANTÂNEO



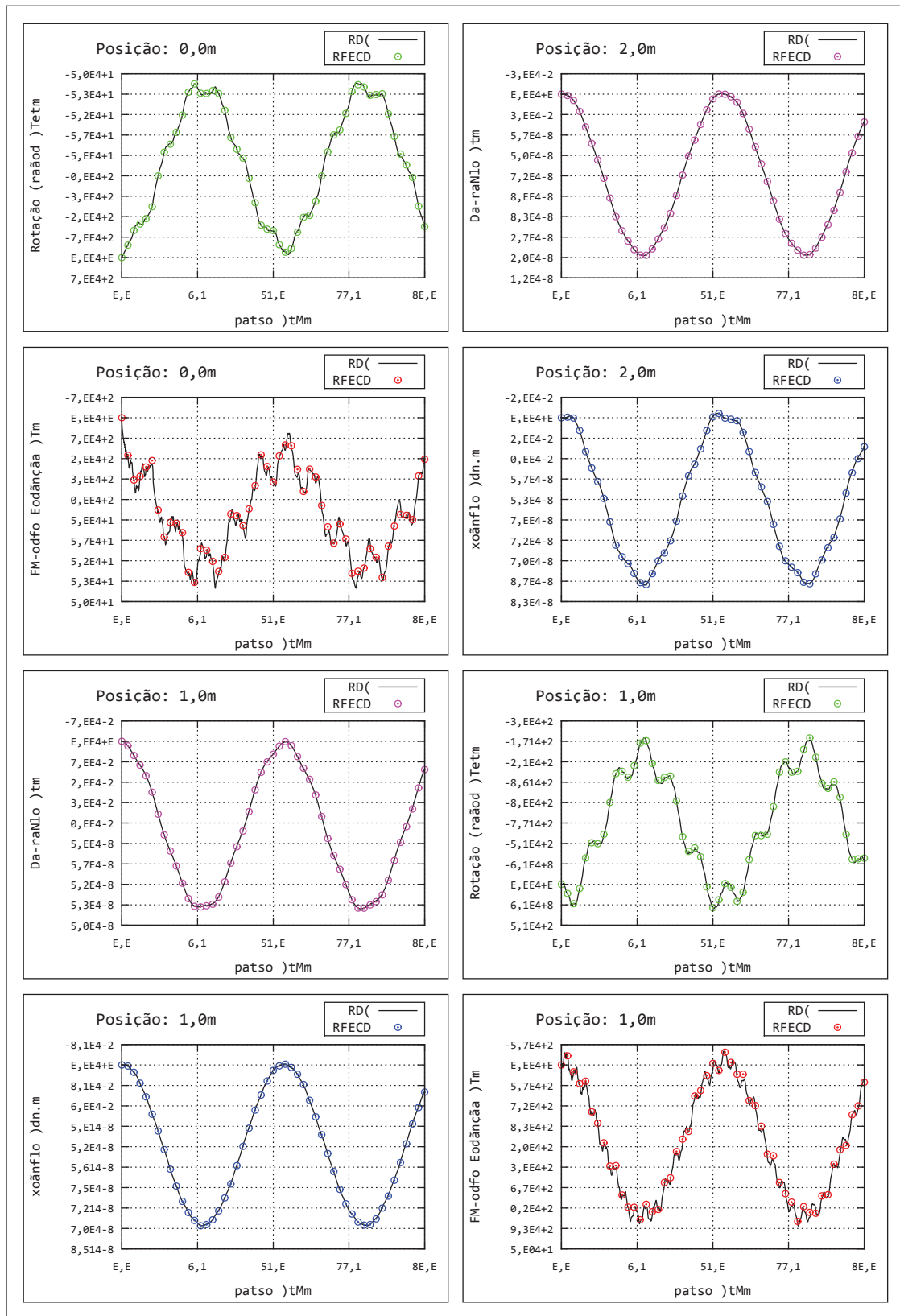
FONTE: O autor (2017).

FIGURA 29 – RESULTADOS PARA VIGA EA COM CARGA DISTRIBUÍDA - CARREGAMENTO INSTANTÂNEO



FONTE: O autor (2017).

FIGURA 30 – RESULTADOS PARA VIGA EL COM CARGA DISTRIBUÍDA - CARREGAMENTO INSTANTÂNEO



FONTE: O autor (2017).

4.2 ANÁLISE DOS RESULTADOS

De uma maneira geral e sucinta, percebe-se que os resultados numéricos para o caso estático apresentam elevada acurácia com a solução analítica. Para o caso dinâmico, para o qual não se conhece a solução analítica, os dois resultados numéricos apresentam boa concordância. Tal fato é um forte indicativo que as soluções numéricas propostas apresentam boa qualidade, já que os métodos apresentam poucas semelhanças entre si.

De maneira mais detalhada, é conveniente fazer a análise pelos três grupos apresentados: vigas com carregamento estático; vigas com carregamento crescente no tempo, até chegar no máximo; e vigas com carregamento aplicado de forma instantânea.

4.2.1 Resultados para carregamento estático

Para o carregamento estático, cujos resultados são mostrados nas Figuras 7 até 14, é possível notar que as duas soluções numéricas praticamente coincidem com as soluções analíticas. Para o MEC, o valor numérico obtido é exatamente igual à solução analítica. Importante ressaltar que até o esforço cortante, que envolve a derivada de terceira ordem do deslocamento e, portanto, está muito mais sujeito às instabilidades numéricas, também apresentou bons resultados. O tempo computacional² gasto para as soluções numéricas é praticamente instantâneo para o MEC, bem como para o MDF.

Sobre o esforço cortante, um fato curioso pode ser visto nos resultados com o carregamento estático concentrado, mostrado nas Figuras 7, 9, 11 e 13. O salto que existe nos gráficos representa a carga concentrada aplicada. A solução com o MDF apresentou, para o ponto de aplicação da carga, um valor intermediário, enquanto que a solução do MEC, resultou num dos extremos, coincidindo com a solução analítica. De fato, a solução analítica contém uma descontinuidade no ponto de aplicação da carga concentrada, que foi melhor representada pelo MEC.

²Todos os exemplos foram simulados no mesmo computador. Os tempos computacionais mencionados nesta subseção e nas duas seguintes são os medidos no computador utilizado.

A influência da base elástica pode ser visualizada principalmente nos gráficos do momento fletor e esforço cortante dos exemplos com carga concentrada. Os gráficos de momentos fletores com vigas sem base elástica e sujeitas a uma carga concentrada são compostos por dois segmentos de reta. Por consequência, o resultado para o esforço cortante é composto por dois trechos com valores constantes. Ao carregar uma viga apoiada em base elástica, o deslocamento gerado faz com que surja, como reação, um carregamento distribuído não uniforme na viga, devido à deformação da base elástica. Ora, essa alteração pode ser vista nos resultados apresentados, sendo os mais evidentes os para a viga AA e para a viga EL, nas Figuras 7 e 13, respectivamente.

Já para os resultados com carga distribuída, o gráfico do momento fletor para vigas sem base elástica é uma parábola e, por consequência, o esforço cortante é uma reta inclinada. Mas o carregamento não uniforme, gerado pela base elástica, altera esses gráficos. Como o gráfico do momento é uma curva, mesmo sem base elástica, a influência da base elástica é mais difícil de ser percebida. Já o esforço cortante deixa de ser uma reta, porém, devido aos valores das propriedades elásticas escolhidas, a curvatura do esforço cortante não ficou tão acentuada.

4.2.2 Resultados para carregamento gradual

As Figuras 15 a 22 apresentam as respostas obtidas ao aplicar um carregamento crescente na viga, até atingir o valor final constante. O tempo computacional gasto para estas soluções numéricas foi maior do que o para as soluções do caso estático. Ele está associado com a discretização adotada e o número de passos de tempo. Para as vigas AA, EE e EA, com o MEC-D, o tempo de cada análise foi aproximadamente um minuto enquanto para as vigas EL foi gasto menos de um minuto. Já com o MDF, para as vigas AA, EE e EA, o tempo de cada análise foi aproximadamente de 55 minutos e para as vigas EL, aproximadamente 17 minutos.

Para todos os resultados, é notável o crescimento dos esforços até o tempo de 50 milisegundos e depois uma oscilação em torno de um valor constante. O crescimento do

esforço está de acordo com o crescimento da carga, ou seja, conforme a carga cresce, os esforços crescem. Após a carga atingir seu valor final constante, os esforços oscilam em torno de um valor também constante.

As propriedades do material e da geometria da viga foram mantidas as mesmas da análise estática, sendo acrescentadas somente a densidade e a área da seção transversal, devido à parcela da aceleração. Já que as propriedades comuns possuem o mesmo valor, é possível comparar os resultados do carregamento dinâmico gradual com os do estático. De antemão, de acordo com Hibbeler [2], sabe-se que se o carregamento for suficientemente lento, os resultados finais serão os resultados obtidos com a formulação estática.

Tomando as respostas dinâmicas apresentadas, percebe-se que, após atingir a carga final em 50 milissegundos, todos os resultados obtidos, tanto para o contorno como para o ponto interno, oscilam em torno da solução estática, apresentada nas Figuras 7 até 14. As soluções numéricas obtidas se comportaram como esperado, mesmo para um carregamento total em 50 milissegundos. Assim, é possível dizer que as formulações dinâmicas apresentam bons resultados. Visualmente, chamam atenção os resultados para as vigas EE e EL sujeitas à carga concentrada e para as vigas EE e EL sujeitas ao carregamento distribuído, respectivamente nas Figuras 16, 18, 20 e 22, já que são as que apresentam a menor oscilação depois de atingir a carga final. Esta menor oscilação pode ser atribuída às condições de contorno impostas pelo vínculo do tipo engaste (E) e, para as vigas EL, também ao comprimento adotado.

Um fato curioso acontece com o deslocamento do ponto interno apresentado para os quatro tipos de vigas analisadas sujeitas à carga concentrada (Figuras 15, 16, 17 e 18). Nos primeiros instantes de tempo, os deslocamentos calculados são negativos, opostos ao sentido do carregamento³. Estes resultados ainda precisam ser melhores investigados, mas duas hipóteses podem ser consideradas:

- a) Os deslocamentos ocorrem por instabilidades numéricas.

Já que o carregamento é pequeno quando estes valores ocorrem, instabilidades e erros de truncamento podem distorcer o cálculo destes valores. As respostas

³Observando os arquivos de respostas de cada um dos métodos numéricos, é possível verificar que existem deslocamentos negativos em todos eles, em ambos os métodos. Para a viga AA, ocorre até o tempo $t = 3,4\text{ms}$; para a EE, até $t = 2,7\text{ms}$; para a EA, até $t = 3,0\text{ms}$; para a EL, até $t = 1,6\text{ms}$.

para os primeiros passos de tempo das oito vigas analisadas apresentam alterações de sinal. O valor absoluto destes resultados para os primeiros passos de tempo, quando comparado com o valor final calculado, é praticamente zero e estas instabilidades não afetaram o resultado final esperado.

- b) Estes deslocamentos negativos são inerentes à teoria considerada.

Para o caso estático, Hetényi [5] apresenta solução para vigas infinitas, apoiadas somente pela base elástica, sujeitas a cargas concentradas. Nesta solução, é possível ver que ocorrem deslocamentos negativos, opostos ao sentido de aplicação da carga, a uma certa distância do ponto de aplicação dela, que se anulam a uma distância ainda maior. Nos resultados numéricos obtidos para as vigas AA, EE e EA, para carga concentrada, algo semelhante pode estar acontecendo. Enquanto a carga está pequena, o vínculo da direita (mais próximo do ponto de aplicação) e parte da base elástica seriam suficientes para suportar a carga. Ou seja, para a esquerda do ponto de aplicação da carga, a viga se comporta como viga infinita e deslocamentos negativos podem ocorrer. Além disso, as quatro incógnitas (deslocamento, rotação, momento fletor e esforço cortante) nas proximidades do vínculo esquerdo são praticamente zero, que é igual ao resultado estático para vigas infinitas em pontos distantes do ponto de aplicação. Com o passar do tempo, a carga aumenta, fazendo com que o deslocamento também aumente e os valores das quatro incógnitas nas proximidades do vínculo esquerdo passam a ser diferentes de zero. Assim, a partir deste momento, o tipo de vínculo começa a afetar os resultados.

Para o MEC-D, bastaria que fossem apresentados os resultados para as incógnitas do contorno (os quatro primeiros) e o do deslocamento do ponto interno, ou seja, os cinco primeiros gráficos de cada análise. Os outros três resultados, rotação, momento fletor e esforço cortante para um ponto interno, são obtidos como pós-processamento e refletem a qualidade dos cinco primeiros resultados calculados.

Já para o MDF, somente os deslocamentos são calculados e utilizados diretamente pelo método. O cálculo dos demais esforços, no domínio ou no contorno, é feito depois de

já se conhecer os deslocamentos ao longo da viga. Assim, a qualidade do resultado para os deslocamentos afeta diretamente o resultado para as outras incógnitas.

Quando há simetria dos vínculos e da carga, os valores do deslocamento e do momento fletor no vínculo esquerdo devem ser iguais aos do vínculo direito. Já os valores para a rotação e o esforço cortante devem ser iguais em módulo. Esta simetria pode ser encontrada nas vigas AA e EE que possuem carregamento distribuído, servindo como balizador da qualidade da solução numérica. Analisando o resultado apresentado nas Figuras 19 e 20, referente às duas vigas citadas, é visível que a solução numérica representou bem esta relação esperada.

Assim, conclui-se que os resultados para os dois métodos numéricos possuem boa qualidade.

4.2.3 Resultados para carregamento instantâneo

Os bons resultados obtidos com vigas sujeitas a carregamentos graduais foram fatores que proporcionaram segurança para aplicar as formulações numéricas a outros tipos de carregamento, isto porque a formulação empregada é a mesma. Foi escolhido, assim, aplicar carregamentos instantâneos nas vigas analisadas. Os resultados estão nas Figuras 23 até 30.

O tempo computacional gasto para as soluções do MEC-D foi praticamente o mesmo dos resultados com carregamento gradual, apresentado na subseção anterior. Essa igualdade se deu por que o número de células e o número de passos de tempo são os mesmos. Já com o MDF, o tempo computacional, para as vigas AA, EE e EA, foi de aproximadamente 6 minutos, enquanto para as vigas EL, menor do que 2 minutos.

A diferença que chama atenção, comparativamente aos resultados para carregamento aplicado gradualmente, é o comportamento do esforço cortante para as vigas com carregamento concentrado. O trabalho de Scuciato [13] apresentou resultados de esforço cortante para vigas com carregamento instantâneo, mas sem base elástica. Nele, também é possível visualizar grande variação do esforço cortante, para passos de tempo próximos. Assim, os resultados obtidos neste trabalho são aceitáveis.

Como pode ser visto em Mello [10], vigas sujeitas a carregamentos dinâmicos distribuí-

dos tendem a apresentar resultados que se repetem ao longo do tempo. Este comportamento se encontra visível nas análises anteriormente apresentadas, nas Figuras 27 até 30, e fortalece a qualidade dos resultados obtidos. Já para carregamentos concentrados, o comportamento é bem mais irregular, desde o cortante, como já citado, até o deslocamento.

Como para carregamento aplicado gradualmente, o deslocamento do ponto interno apresentado, nas vigas sujeitas a carregamentos concentrados, Figuras 23 até 26, é negativo nos primeiros passos de tempo. Porém, após algum tempo de análise, o deslocamento volta a ser negativo para cargas concentradas instantâneas. Explicações mais detalhadas dependem de mais estudos. Contudo, a repetição de deslocamentos negativos ao longo do tempo, sem gerar instabilidade numérica, fortalece a hipótese de que estes deslocamentos são inerentes à formulação empregada, e não associados à alguma instabilidade.

Como na subseção anterior, a simetria de vínculos e carregamento das vigas AA e EE fornecem outro indicativo da boa qualidade dos resultados. Visualmente, as Figuras 27 e 28 mostram que o resultado para o vínculo da esquerda é igual ao do vínculo da direita, para o momento fletor, e iguais em módulo para a rotação e o esforço cortante.

Como citado anteriormente, a qualidade dos resultados do MEC-D nos cinco primeiros gráficos de cada análise é o que norteia a qualidade para os outros três (rotação, momento e esforço cortante para um ponto interno), já que eles são obtidos como pós-processamento. Para o MDF, a qualidade do resultado para os deslocamentos afeta diretamente o resultado para as outras incógnitas, tanto no domínio como no contorno.

Já que a formulação apresentou bons resultados para carregamentos graduais, era esperado que o mesmo se repetisse para qualquer tipo de carregamento. Dados os pontos citados nesta subseção, percebe-se que isso de fato ocorreu, reforçando que os dois métodos numéricos apresentaram resultados de boa qualidade.

5 CONCLUSÃO

5.1 REVISÃO DOS ASSUNTOS ABORDADOS

Este trabalho se propôs a apresentar a aplicação do Método dos Elementos de Contorno para vigas sobre base elástica sujeitas a carregamentos estáticos e dinâmicos, concentrados ou distribuídos. As vigas para as quais a solução numérica foi apresentada foram a biapoiada (AA), biengastada (EE), engastada-apoiada (EA) e a engastada-livre (EL). Em virtude da falta de solução analítica para o caso dinâmico, outra solução numérica, obtida com o Método das Diferenças Finitas, foi apresentada para a comparação dos resultados numéricos.

O Capítulo 1 introduziu o assunto tratado e apresentou algumas referências bibliográficas dos assuntos relacionados a este trabalho.

Já o Capítulo 2 trouxe a formulação da teoria de vigas sobre base elástica. A seção 2.2 apresentou uma maneira genérica de obter a solução analítica para carregamentos estáticos. Apesar de também ser uma solução analítica, a solução fundamental do problema tem um aspecto importante neste trabalho e, por isso, foi apresentada na seção 2.3.

O núcleo do trabalho se encontra no Capítulo 3, onde são apresentadas as formulações numéricas. Primeiramente foi apresentada a formulação do Método de Diferenças Finitas (MDF) para o caso estático, já que a para o caso dinâmico, apresentada logo depois, é uma evolução do primeiro caso. Na sequência, foi apresentado o desenvolvimento da formulação do caso estático e a do caso dinâmico do Método dos Elementos de Contorno (MEC e MEC-D, respectivamente), sempre partindo da técnica de resíduos ponderados, sendo que ambas utilizaram a solução fundamental do caso estático.

A aplicação das formulações desenvolvidas se deu por exemplos, mostrados no Capítulo 4. Nele, os resultados para vigas do tipo AA, EE, EA e EL, sujeitas a cargas concentradas ou dinâmicas, foram apresentados. A análise da qualidade dos resultados finalizou o Capítulo.

5.2 CONCLUSÕES E CONTRIBUIÇÕES DO PRESENTE TRABALHO

Saber que é possível obter resultados numéricos com qualidade, como exposto no capítulo anterior, é gratificante. Para isso, foram necessárias algumas etapas, das quais se pode elencar duas principais e que exigiram considerável esforço: o desenvolvimento das formulações numéricas e a implementação computacional. O desenvolvimento das formulações exige conhecimento de cada método e domínio de ferramentas matemáticas apropriadas, enquanto a implementação computacional exige certa habilidade em alguma linguagem de programação.

A qualidade da resposta está relacionada com o método e a discretização escolhidos. Para o caso estático, a solução do MEC, que não necessita de discretização, é exatamente a solução analítica, enquanto a solução obtida com o MDF é aproximada. Para os casos dinâmicos, a discretização utilizada com o MEC-D variou, mas foi sempre menos refinada do que a utilizada pelo MDF. Essa diferente discretização também impacta o tempo computacional necessário para o cálculo. Se utilizada a mesma discretização, o tempo computacional para o MDF é levemente menor do que o MEC-D, porém a qualidade da resposta do último é melhor. Isso pode ser melhor visualizado utilizando uma discretização mais grosseira, quando o MDF apresenta amortecimento crescente ao longo do tempo enquanto o MEC-D mantém uma melhor precisão, até mesmo para o esforço cortante de cargas concentradas instantâneas.

A sensibilidade à discretização pode ser explicada pela abordagem de cada método numérico. Enquanto o MDF é mais simples, substituindo as derivadas da equação diferencial por quocientes finitos, o Método dos Elementos de Contorno (para o caso estático ou para o caso dinâmico), depende, por exemplo: da solução fundamental, particular para cada equação diferencial; integração por partes; e solução das incógnitas do contorno de maneira simultânea. Ou seja, mais ferramentas matemáticas são necessárias para o Método dos Elementos de Contorno do que para o Método das Diferenças Finitas, o que aumenta sua complexidade, mas melhora os resultados.

Deve-se ressaltar que a escolha do MDF implícito, para os casos dinâmicos, faz com que ele seja sempre estável, independentemente do número de nós e da distância entre os passos de tempo. Usar a opção explícita do método não requer a solução do sistema para

cada passo de tempo, mas precisa de uma relação entre os incrementos espacial e temporal para garantir sua estabilidade.

Os bons resultados obtidos justificam a principal contribuição deste trabalho: o desenvolvimento da formulação MEC-D para vigas sobre base elástica. Também são notáveis os resultados de momento fletor e esforço cortante que, apesar de serem importantes para dimensionamento estrutural, não são apresentados diretamente em outros trabalhos.

Como contribuição secundária, é possível citar: as soluções analíticas para as quatro vigas apresentadas para cargas concentradas e para a viga EA para carga distribuída; a formulação do MDF para os casos estáticos e dinâmicos; a formulação do MEC para o caso estático.

5.3 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Na mesma linha deste trabalho, outras análises são possíveis. Uma delas é a consideração de vigas contínuas, sujeitas aos mesmos tipos de carregamento considerados aqui.

Outra das aplicações possíveis é a análise de trilhos de ferrovias. Eles são suportados pelos dormentes, que podem ser tratados como apoio contínuo, representados por um coeficiente de mola, e pelo lastro, que pode ser representado por um coeficiente de mola menor.

Como comentado na análise dos resultados para carregamento aplicado gradualmente, esforços de tração surgiram nas simulações e, neste trabalho, foi admitido que a base elástica resistiu a tais esforços. Outra fonte de estudo é quando isto não for verdade, exigindo uma abordagem diferente onde a viga tende a se separar da base elástica.

Uma caso intrigante é o estudo de uma viga suportada somente pela base elástica, ou, utilizando a nomenclatura deste trabalho, uma viga do tipo LL. Estando a viga sujeita a uma carga concentrada ou a uma distribuída, aplicada parcialmente, seus extremos tendem a se levantar da base elástica, que pode não resistir ao esforço de tração resultante. É necessário, portanto, determinar os pontos em que estes esforços surgem e desconsiderar a base elástica

onde for pertinente.

No MEC-D, foi utilizada a solução fundamental da viga sobre base elástica. A integral de domínio envolvendo a aceleração foi calculada com a discretização do domínio. Uma sugestão é utilizar a solução fundamental de viga sem base elástica, que não eliminaria a integral de domínio envolvendo o coeficiente da base elástica. Essa integral de domínio pode ser resolvida utilizando a mesma discretização feita para a aceleração.

Tanto para as vigas analisadas neste trabalho quanto para as sugestões anteriores, é possível, também, considerar uma carga móvel, concentrada ou distribuída, percorrendo a viga.

5.4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Apesar da equação da Teoria de Euler-Bernoulli ser unidimensional, reduzindo o contorno do problema aos pontos do contorno, a solução numérica mostrou-se trabalhosa. Ao acrescentar o tempo como variável, a complexidade da solução aumentou. Porém, é recompensador saber que as soluções numéricas apresentadas foram capazes de resolver bem os problemas propostos. Em particular, as soluções para o caso dinâmico, já que não há solução analítica disponível.

O sucesso das soluções numéricas obtidas serve como incentivo para que estudos futuros, com estas e outras formulações, sejam desenvolvidos.

REFERÊNCIAS

- 1 BEER, F. P.; JR, E. R. J.; DEWOLF, J. T.; MAZUREK, D. F. **Mecânica dos Materiais**. 5. ed. Porto Alegre: AMGH, 2011.
- 2 HIBBELER, H. B. **Resistência dos Materiais**. 7. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2010.
- 3 RAO, S. S. **Mechanical Vibrations**. 4. ed. New Jersey: Prentice Hall, 2004.
- 4 GRAFF, K. F. **Wave Motion in Elastic Solids**. 1. ed. New York: Dover Publications, Inc., 1991.
- 5 HETÉNYI, M. **Beams on Elastic Foundation: Theory with Applications in the Fields of Civil and Mechanical Engineering**. Ann Arbor: The University of Michigan Press, 1946.
- 6 BREBBIA, C. A.; TELLES, J. C. F.; WROBEL, L. C. **Boundary element techniques: theory and applications in engineering**. Heidelberg: Springer-Verlag, 1984.
- 7 CUNHA, M. C. C. **Métodos Numéricos**. 2. ed. Campinas: Unicamp, 2000.
- 8 FORNBERG, B. Generation of finite difference formulas on arbitrarily spaced grids. **Mathematics of Computation**, v. 51, 1988.
- 9 SMITH, G. D. **Numerical Solution of Partial Differential Equations**. 3. ed. Oxford: Clarendon Press, 2004.
- 10 MELLO, E. H. V. M. de. **Análise dinâmica de vigas de Euler-Bernoulli e de Timoshenko com o Método das Diferenças Finitas**. Trabalho Final de Curso (Engenharia Civil) — UFPR, 2014.
- 11 BREBBIA, C. A.; DOMINGUEZ, J. **Boundary Elements: An Introductory Course**. 2. ed. Southampton: WIT Press, 1994.
- 12 CARRER, J. A. M.; MANSUR, W. J.; VANZUIT, R. J. Scalar wave equation by the boundary element method: a d-bem approach with non-homogeneous initial conditions. **Computacional Mechanics**, v. 41, 2009.
- 13 SCUCIATO, R. F. **Análise dinâmica de vigas de Euler-Bernoulli pelo método dos elementos de contorno utilizando soluções fundamentais dependentes do tempo**. Tese (Doutorado) — UFPR, 2014.
- 14 HOUBOLT, J. C. A recurrence matrix solution for the dynamic response of aircraft in gusts. **National Advisory Committee for Aeronautics**, 1950.
- 15 CARRER, J. A. M.; FLEISCHFRESSER, S. A.; GARCIA, L. T. F.; MANSUR, W. J. Dynamic analysis of timoshenko beams by the boundary element method. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 37, 2013.

- 16 BOWLES, J. E. **Foundation Analysis and Design**. 5. ed. Singapore: McGraw-Hill, 1997.
- 17 DEBNATH, L.; BHATTA, D. **Integral Transforms and Their Applications**. 2. ed. Boca Raton: Taylor & Francis Group, 2006.
- 18 KAPLAN, W. **Advanced Calculus**. 5. ed. [S.l.]: Pearson, 2002.
- 19 FLEISCHFRESSER, S. A. **Uma Formulação do Método dos Elementos de Contorno para a Análise de Vigas de Timoshenko**. Tese (Doutorado) — UFPR, 2012.

APÊNDICES

APÊNDICE 1 – SOLUÇÕES ANALÍTICAS PARA O CASO ESTÁTICO	97
APÊNDICE 2 – DERIVADAS DA SOLUÇÃO FUNDAMENTAL.	102
APÊNDICE 3 – INTEGRAIS DO CARREGAMENTO.	104
APÊNDICE 4 – INTEGRAIS DAS DERIVADAS DE u^*	105
APÊNDICE 5 – INTEGRAIS DE $x \frac{\partial^\eta u^*}{\partial \xi^\eta}$	107
APÊNDICE 6 – CÓDIGOS IMPLEMENTADOS	110

APÊNDICE 1 – SOLUÇÕES ANALÍTICAS PARA O CASO ESTÁTICO

Neste apêndice são apresentadas as soluções analíticas do caso estático, para as vigas analisadas e as cargas utilizadas neste trabalho. Elas são baseadas nas equações (4), (5), (6) e (7), apresentadas na seção 2.2 e no apresentado por Hetényi [5]. As vigas analisadas são a biapoiada (AA), biengastada (EE), engastada-apoiada (EA) e a engastada-livre (EL). Já as cargas utilizadas são: carregamento distribuído uniforme ou uma carga concentrada. Para as vigas AA, EE e EL para carregamentos uniformemente distribuído, Hetényi [5] apresenta diretamente a solução e elas só estão rerepresentadas aqui. Nas soluções, aparece o parâmetro $\lambda = \sqrt[4]{\kappa/(EI)}$ e a variável $x' = L - x$.

Carregamento Uniformemente Distribuído - Viga AA

Para um carregamento constante e uniformemente distribuído ao longo da viga, a solução analítica para a deflexão (u) é mostrada em (94); para a rotação (θ), em (95); para o momento fletor (M), em (96); e para o esforço cortante (Q), mostrada em (97).

$$u = \frac{q}{\kappa} \left[1 - \frac{\cosh \lambda x \cos \lambda x' + \cosh \lambda x' \cos \lambda x}{\cosh \lambda L + \cos \lambda L} \right]. \quad (94)$$

$$\theta = \frac{q\lambda}{\kappa} \frac{1}{\cosh \lambda L + \cos \lambda L} \left(\begin{aligned} &\sinh \lambda x \cos \lambda x' + \cosh \lambda x \sin \lambda x' \\ &- \sinh \lambda x' \cos \lambda x - \cosh \lambda x' \sin \lambda x \end{aligned} \right). \quad (95)$$

$$M = \frac{q}{2\lambda^2} \frac{\sinh \lambda x \sin \lambda x' + \sinh \lambda x' \sin \lambda x}{\cosh \lambda L + \cos \lambda L}. \quad (96)$$

$$Q = -\frac{q}{2\lambda} \frac{1}{\cosh \lambda L + \cos \lambda L} \left(\begin{aligned} &\sinh \lambda x \cos \lambda x' - \cosh \lambda x \sin \lambda x' \\ &+ \cosh \lambda x' \sin \lambda x - \sinh \lambda x' \cos \lambda x \end{aligned} \right). \quad (97)$$

Carregamento Uniformemente Distribuído - Viga EE

Para um carregamento constante e uniformemente distribuído ao longo da viga, a solução analítica para a deflexão (u) é mostrada em (98); para a rotação (θ), em (99); para o momento fletor (M), em (100); e para o esforço cortante (Q), mostrada em (101).

$$u = \frac{q}{\kappa} \left[1 - \frac{1}{\sinh \lambda L + \sen \lambda L} \left(\sinh \lambda x \cos \lambda x' + \sen \lambda x \cosh \lambda x' + \sinh \lambda x' \cos \lambda x + \sen \lambda x' \cosh \lambda x \right) \right]. \quad (98)$$

$$\theta = -\frac{2q\lambda}{\kappa} \frac{\sinh \lambda x \sen \lambda x' - \sinh \lambda x' \sen \lambda x}{\sinh \lambda L + \sen \lambda L}. \quad (99)$$

$$M = -\frac{q}{2\lambda^2} \frac{1}{\sinh \lambda L + \sen \lambda L} \left(\sinh \lambda x \cos \lambda x' + \cos \lambda x \sinh \lambda x' - \cosh \lambda x' \sen \lambda x - \sen \lambda x' \cosh \lambda x \right). \quad (100)$$

$$Q = -\frac{q}{\lambda} \frac{\cosh \lambda x \cos \lambda x' - \cosh \lambda x' \cos \lambda x}{\sinh \lambda L + \sen \lambda L}. \quad (101)$$

Carregamento Uniformemente Distribuído - Viga EA

São conhecidos $u_0 = u(0)$, $\theta_0 = \theta(0)$, $u_L = u(L)$ e $M_L = M(L)$. Escrevendo o deslocamento e a rotação para $x = L$ chega-se em

$$u(L) = 0 = -\frac{1}{\lambda^2 EI} M(0) F_3(\lambda L) - \frac{1}{\lambda^3 EI} Q(0) F_4(\lambda L) + \frac{1}{\lambda^3 EI} \int_0^L q F_4(\lambda x - \lambda v) dv \quad (102)$$

e

$$M(L) = 0 = M(0) F_1(\lambda L) + \frac{1}{\lambda} Q(0) F_2(\lambda L) - \frac{1}{\lambda} \int_0^L q F_2(\lambda x - \lambda v) dv. \quad (103)$$

Resolvendo o sistema de duas equações formado por (102) e (103), obtém-se o valor de $M(0)$ e $Q(0)$. Com a solução determinada, basta aplicar as equações (4), (5), (6) e (7) para os pontos desejados.

Carregamento Uniformemente Distribuído - Viga EL

Para um carregamento constante e uniformemente distribuído ao longo da viga, a solução analítica para a deflexão (u) é mostrada em (104); para a rotação (θ), em (105); para o momento fletor (M), em (106); e para o esforço cortante (Q), mostrada em (107).

$$u = \frac{q}{\kappa} \left\{ 1 - \frac{1}{\cosh^2 \lambda L + \cos^2 \lambda L} \left[\cosh \lambda L (\sinh \lambda x' \sen \lambda x + \cos \lambda x \cosh \lambda x') - \cos \lambda L (\sinh \lambda x \sen \lambda x' - \cos \lambda x' \cosh \lambda x) \right] \right\}. \quad (104)$$

$$\theta = -\frac{2q\lambda}{\kappa} \frac{\sinh \lambda x \cos \lambda x' \cos \lambda L - \sen \lambda x \cosh \lambda x' \cosh \lambda L}{\cosh^2 \lambda L + \cos^2 \lambda L}. \quad (105)$$

$$M = -\frac{q}{2\lambda^2} \frac{1}{\cosh^2 \lambda L + \cos^2 \lambda L} \left[\cosh \lambda L (\sinh \lambda x' \sen \lambda x - \cos \lambda x \cosh \lambda x') + \cos \lambda L (\sinh \lambda x \sen \lambda x' + \cos \lambda x' \cosh \lambda x) \right]. \quad (106)$$

$$Q = -\frac{q}{\lambda} \frac{\sinh \lambda x' \cos \lambda x \cosh \lambda L + \sen \lambda x' \cosh \lambda x \cos \lambda L}{\cosh^2 \lambda L + \cos^2 \lambda L}. \quad (107)$$

O sinal negativo imediatamente à direita da igualdade em (106) e (107) estão omissos no livro de Hetényi [5].

Carga Concentrada - Viga AA

São conhecidos $u_0 = u(0)$, $M_0 = M(0)$, $u_L = u(L)$ e $M_L = M(L)$. Escrevendo o deslocamento e o momento para $x = L$ chega-se em

$$u(L) = 0 = \frac{1}{\lambda} \theta(0) F_2(\lambda L) - \frac{1}{\lambda^3 EI} Q(0) F_4(\lambda L) + \frac{1}{\lambda^3 EI} P F_4(\lambda L - \lambda x_P) \quad (108)$$

e

$$M(L) = 0 = \frac{1}{\lambda} Q(0) F_2(\lambda L) + \frac{\kappa}{\lambda^3} \theta(0) F_4(\lambda L) - \frac{1}{\lambda} P F_2(\lambda L - \lambda x_P). \quad (109)$$

Resolvendo o sistema de duas equações formado por (108) e (109), obtém-se o valor

de $\theta(0)$ e $Q(0)$. Com a solução determinada, basta aplicar as equações (4), (5), (6) e (7) para os pontos desejados.

Carga Concentrada - Viga EE

São conhecidos $u_0 = u(0)$, $\theta_0 = \theta(0)$, $u_L = u(L)$ e $\theta_L = \theta(L)$. Escrevendo o deslocamento e a rotação para $x = L$ chega-se em

$$u(L) = 0 = -\frac{1}{\lambda^2 EI} M(0) F_3(\lambda L) - \frac{1}{\lambda^3 EI} Q(0) F_4(\lambda L) + \frac{1}{\lambda^3 EI} P F_4(\lambda L - \lambda x_P) \quad (110)$$

e

$$\theta(L) = 0 = -\frac{1}{\lambda EI} M(0) F_2(\lambda L) - \frac{1}{\lambda^2 EI} Q(0) F_3(\lambda L) + \frac{1}{\lambda^2 EI} P F_3(\lambda L - \lambda x_P). \quad (111)$$

Resolvendo o sistema de duas equações formado por (110) e (111), obtém-se o valor de $M(0)$ e $Q(0)$. Com a solução determinada, basta aplicar as equações (4), (5), (6) e (7) para os pontos desejados.

Carga Concentrada - Viga EA

São conhecidos $u_0 = u(0)$, $\theta_0 = \theta(0)$, $u_L = u(L)$ e $M_L = M(L)$. Escrevendo o deslocamento e o momento para $x = L$ chega-se em

$$u(L) = 0 = -\frac{1}{\lambda^2 EI} M(0) F_3(\lambda L) - \frac{1}{\lambda^3 EI} Q(0) F_4(\lambda L) + \frac{1}{\lambda^3 EI} P F_4(\lambda L - \lambda x_P) \quad (112)$$

e

$$M(L) = 0 = M(0) F_1(\lambda L) + \frac{1}{\lambda} Q(0) F_2(\lambda L) - \frac{1}{\lambda} P F_2(\lambda L - \lambda x_P). \quad (113)$$

Resolvendo o sistema de duas equações formado por (112) e (113), obtém-se o valor de $M(0)$ e $Q(0)$. Com a solução determinada, basta aplicar as equações (4), (5), (6) e (7) para os pontos desejados.

Carga Concentrada - Viga EL

São conhecidos $u_0 = u(0)$, $\theta_0 = \theta(0)$, $M_L = M(L)$ e $Q_L = Q(L)$. Escrevendo o momento e o esforço cortante para $x = L$ chega-se em

$$M(L) = 0 = M(0)F_1(\lambda L) + \frac{1}{\lambda}Q(0)F_2(\lambda L) - \frac{1}{\lambda}PF_2(\lambda L - \lambda x_P) \quad (114)$$

e

$$Q(L) = 0 = Q(0)F_1(\lambda L) - 4\lambda M(0)F_4(\lambda L) - PF_1(\lambda L - \lambda x_P). \quad (115)$$

Resolvendo o sistema de duas equações formado por (114) e (115), obtém-se o valor de $M(0)$ e $Q(0)$. Com a solução determinada, basta aplicar as equações (4), (5), (6) e (7) para os pontos desejados.

APÊNDICE 2 – DERIVADAS DA SOLUÇÃO FUNDAMENTAL

A solução fundamental pode ser encontrada na bibliografia em Debnath e Bhatta [17] e em Hetényi [5], foi apresentada neste trabalho em (11) e é

$$u^* = \frac{1}{2a^3} \exp\left(\frac{-ar}{\sqrt{2}}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{ar}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4}\right), \quad (116)$$

onde $a^4 = \kappa/(EI)$ e $r = |\xi - x|$.

As derivadas da solução fundamental foram determinadas considerando a regra da cadeia, derivando primeiro u^* em relação a r e, depois, r em relação a x e/ou ξ .

A derivada primeira de r em relação a x ou em relação a ξ é sempre igual a $+1$ ou -1 , variando conforme os valores de x e ξ . Em termos matemáticos, é possível escrever que

$$\frac{dr}{dx} = \begin{cases} +1, & \text{se } \xi > x \\ -1, & \text{se } \xi < x \end{cases} \quad \text{e} \quad \frac{dr}{d\xi} = \begin{cases} -1, & \text{se } \xi > x \\ +1, & \text{se } \xi < x \end{cases}. \quad (117)$$

Com o exposto em (117), fica evidente que as derivadas de grau dois ou superior de r em relação a x ou em relação a ξ são sempre nulas. Quando $x = \xi$, há uma descontinuidade em r que é tratada considerando o limite pela direita ou pela esquerda.

O curso de Cálculo fornece a regra do produto para derivadas. Aplicando ela o número de vezes necessário e considerando (117), é possível escrever que

$$\frac{\partial^{(n+m)} u^*}{\partial x^n \partial \xi^m} = \frac{d^{(n+m)} u^*}{dr^{(n+m)}} \left(\frac{dr}{dx}\right)^n \left(\frac{dr}{d\xi}\right)^m, \quad (118)$$

onde n é o grau da derivada em relação a x e m é o grau da derivada em relação a ξ . Simplificações diretas de (118) são

$$\frac{d^n u^*}{dx^n} = \frac{d^n u^*}{dr^n} \left(\frac{dr}{dx}\right)^n \quad \text{e} \quad \frac{d^m u^*}{d\xi^m} = \frac{d^m u^*}{dr^m} \left(\frac{dr}{d\xi}\right)^m. \quad (119)$$

Com as igualdades em (118) e (119), basta saber as derivadas de u^* em relação a r

para ter as derivadas da solução fundamental. Partindo de (116), é possível chegar em

$$\frac{du^*}{dr} = \frac{1}{2\sqrt{2}a^2} \exp\left(\frac{-ar}{\sqrt{2}}\right) \left[\cos\left(\frac{ar}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4}\right) - \text{sen}\left(\frac{ar}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4}\right) \right], \quad (120)$$

$$\frac{d^2u^*}{dr^2} = -\frac{1}{2a} \exp\left(\frac{-ar}{\sqrt{2}}\right) \cos\left(\frac{ar}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4}\right), \quad (121)$$

$$\frac{d^3u^*}{dr^3} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \exp\left(\frac{-ar}{\sqrt{2}}\right) \left[\cos\left(\frac{ar}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4}\right) + \text{sen}\left(\frac{ar}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4}\right) \right], \quad (122)$$

$$\frac{d^4u^*}{dr^4} = -\frac{a}{2} \exp\left(\frac{-ar}{\sqrt{2}}\right) \text{sen}\left(\frac{ar}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4}\right), \quad (123)$$

$$\frac{d^5u^*}{dr^5} = \frac{a^2}{2\sqrt{2}} \exp\left(\frac{-ar}{\sqrt{2}}\right) \left[\text{sen}\left(\frac{ar}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{ar}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4}\right) \right], \quad (124)$$

$$\frac{d^6u^*}{dr^6} = \frac{a^3}{2} \exp\left(\frac{-ar}{\sqrt{2}}\right) \cos\left(\frac{ar}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4}\right). \quad (125)$$

APÊNDICE 3 – INTEGRAIS DO CARREGAMENTO

Este apêndice apresenta as soluções analíticas das integrais do tipo

$$\frac{\partial^\eta}{\partial \xi^\eta} \left(\int_0^L q u^* dx \right), \quad (126)$$

onde q é função de x e $\eta = 0, 1, 2$ ou 3 , que é o grau da derivada parcial de u^* em relação a ξ . A equação de u^* , que depende de ξ e x , foi apresentada em (11) e reapresentada em (116).

Como neste trabalho $0 \leq \xi \leq L$, é conveniente aplicar a regra de Leibniz em (126).

Assim, é possível escrever que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^\eta}{\partial \xi^\eta} \left(\int_0^L q u^* dx \right) &= \frac{\partial^\eta}{\partial \xi^\eta} \left(\int_0^\xi q u^* dx \right) + \frac{\partial^\eta}{\partial \xi^\eta} \left(\int_\xi^L q u^* dx \right) = \\ &= \int_0^\xi q \frac{\partial^\eta u^*}{\partial \xi^\eta} dx + \int_\xi^L q \frac{\partial^\eta u^*}{\partial \xi^\eta} dx. \end{aligned} \quad (127)$$

Neste trabalho, q representa o carregamento da viga. Para carregamentos distribuídos uniformes ao longo de toda a viga, q se comporta como uma constante e é possível escrever

$$\int_0^\xi q \frac{\partial^\eta u^*}{\partial \xi^\eta} dx + \int_\xi^L q \frac{\partial^\eta u^*}{\partial \xi^\eta} dx = q \int_0^\xi \frac{\partial^\eta u^*}{\partial \xi^\eta} dx + q \int_\xi^L \frac{\partial^\eta u^*}{\partial \xi^\eta} dx. \quad (128)$$

Para carregamentos concentrados constantes aplicados no ponto C da viga, $q = P\delta(C, x)$, onde P representa a intensidade da carga. Com as propriedades do delta de Dirac, é possível escrever que

$$\begin{aligned} \int_0^\xi P\delta(C, x) \frac{\partial^\eta u^*}{\partial \xi^\eta} dx + \int_\xi^L P\delta(C, x) \frac{\partial^\eta u^*}{\partial \xi^\eta} dx &= \int_0^L P\delta(C, x) \frac{\partial^\eta u^*}{\partial \xi^\eta} dx = \\ &= P \int_0^L \delta(C, x) \frac{\partial^\eta u^*}{\partial \xi^\eta} dx = P \frac{\partial^\eta u^*}{\partial \xi^\eta} \Big|_{\xi=C}. \end{aligned} \quad (129)$$

A solução da derivada à direita de (129) está no Apêndice 2 e as integrais à direita de (128) estão resolvidas no Apêndice 4.

APÊNDICE 4 – INTEGRAIS DAS DERIVADAS DE u^*

Este apêndice apresenta as soluções analíticas das integrais do tipo

$$\int_{x_i}^{x_f} \frac{\partial^\eta u^*}{\partial \xi^\eta} dx, \quad (130)$$

onde $\eta = 0, 1, 2$ ou 3 , que é o grau da derivada parcial de u^* em relação a ξ . A equação de u^* , que depende de ξ e x , foi apresentada em (11) e reapresentada em (116). A seguir são apresentadas as soluções analíticas de (130), para os graus citados.

Para $\eta = 0$ e $\xi \leq x_i$,

$$\int_{x_i}^{x_f} u^* dx = -\frac{1}{2a^4} \left\{ \exp \left[\frac{-a(x_f - \xi)}{\sqrt{2}} \right] \cos \left[\frac{a(x_f - \xi)}{\sqrt{2}} \right] - \exp \left[\frac{-a(x_i - \xi)}{\sqrt{2}} \right] \cos \left[\frac{a(x_i - \xi)}{\sqrt{2}} \right] \right\}. \quad (131)$$

Para $\eta = 0$ e $\xi \geq x_f$,

$$\int_{x_i}^{x_f} u^* dx = \frac{1}{2a^4} \left\{ \exp \left[\frac{-a(\xi - x_f)}{\sqrt{2}} \right] \cos \left[\frac{a(\xi - x_f)}{\sqrt{2}} \right] - \exp \left[\frac{-a(\xi - x_i)}{\sqrt{2}} \right] \cos \left[\frac{a(\xi - x_i)}{\sqrt{2}} \right] \right\}. \quad (132)$$

Para $\eta = 1$ e $\xi \leq x_i$,

$$\begin{aligned} \int_{x_i}^{x_f} \frac{\partial u^*}{\partial \xi} dx = & -\frac{1}{2\sqrt{2}a^3} \exp \left[\frac{-a(x_f - \xi)}{\sqrt{2}} \right] \left\{ \sin \left[\frac{a(x_f - \xi)}{\sqrt{2}} \right] + \cos \left[\frac{a(x_f - \xi)}{\sqrt{2}} \right] \right\} \\ & + \frac{1}{2\sqrt{2}a^3} \exp \left[\frac{-a(x_i - \xi)}{\sqrt{2}} \right] \left\{ \sin \left[\frac{a(x_i - \xi)}{\sqrt{2}} \right] + \cos \left[\frac{a(x_i - \xi)}{\sqrt{2}} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (133)$$

Para $\eta = 1$ e $\xi \geq x_f$,

$$\begin{aligned} \int_{x_i}^{x_f} \frac{\partial u^*}{\partial \xi} dx = & -\frac{1}{2\sqrt{2}a^3} \exp \left[\frac{-a(\xi - x_f)}{\sqrt{2}} \right] \left\{ \operatorname{sen} \left[\frac{a(\xi - x_f)}{\sqrt{2}} \right] + \cos \left[\frac{a(\xi - x_f)}{\sqrt{2}} \right] \right\} \\ & + \frac{1}{2\sqrt{2}a^3} \exp \left[\frac{-a(\xi - x_i)}{\sqrt{2}} \right] \left\{ \operatorname{sen} \left[\frac{a(\xi - x_i)}{\sqrt{2}} \right] + \cos \left[\frac{a(\xi - x_i)}{\sqrt{2}} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (134)$$

Para $\eta = 2$ e $\xi \leq x_i$,

$$\begin{aligned} \int_{x_i}^{x_f} \frac{\partial^2 u^*}{\partial \xi^2} dx = & -\frac{1}{2a^2} \left\{ \exp \left[\frac{-a(x_f - \xi)}{\sqrt{2}} \right] \operatorname{sen} \left[\frac{a(x_f - \xi)}{\sqrt{2}} \right] \right. \\ & \left. - \exp \left[\frac{-a(x_i - \xi)}{\sqrt{2}} \right] \operatorname{sen} \left[\frac{a(x_i - \xi)}{\sqrt{2}} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (135)$$

Para $\eta = 2$ e $\xi \geq x_f$,

$$\begin{aligned} \int_{x_i}^{x_f} \frac{\partial^2 u^*}{\partial \xi^2} dx = & \frac{1}{2a^2} \left\{ \exp \left[\frac{-a(\xi - x_f)}{\sqrt{2}} \right] \operatorname{sen} \left[\frac{a(\xi - x_f)}{\sqrt{2}} \right] \right. \\ & \left. - \exp \left[\frac{-a(\xi - x_i)}{\sqrt{2}} \right] \operatorname{sen} \left[\frac{a(\xi - x_i)}{\sqrt{2}} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (136)$$

Para $\eta = 3$ e $\xi \leq x_i$,

$$\begin{aligned} \int_{x_i}^{x_f} \frac{\partial^3 u^*}{\partial \xi^3} dx = & +\frac{1}{2\sqrt{2}a} \exp \left[\frac{-a(x_f - \xi)}{\sqrt{2}} \right] \left\{ \cos \left[\frac{a(x_f - \xi)}{\sqrt{2}} \right] - \operatorname{sen} \left[\frac{a(x_f - \xi)}{\sqrt{2}} \right] \right\} \\ & -\frac{1}{2\sqrt{2}a} \exp \left[\frac{-a(x_i - \xi)}{\sqrt{2}} \right] \left\{ \cos \left[\frac{a(x_i - \xi)}{\sqrt{2}} \right] - \operatorname{sen} \left[\frac{a(x_i - \xi)}{\sqrt{2}} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (137)$$

Para $\eta = 3$ e $\xi \geq x_f$,

$$\begin{aligned} \int_{x_i}^{x_f} \frac{\partial^3 u^*}{\partial \xi^3} dx = & +\frac{1}{2\sqrt{2}a} \exp \left[\frac{-a(\xi - x_f)}{\sqrt{2}} \right] \left\{ \cos \left[\frac{a(\xi - x_f)}{\sqrt{2}} \right] - \operatorname{sen} \left[\frac{a(\xi - x_f)}{\sqrt{2}} \right] \right\} \\ & -\frac{1}{2\sqrt{2}a} \exp \left[\frac{-a(\xi - x_i)}{\sqrt{2}} \right] \left\{ \cos \left[\frac{a(\xi - x_i)}{\sqrt{2}} \right] - \operatorname{sen} \left[\frac{a(\xi - x_i)}{\sqrt{2}} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (138)$$

APÊNDICE 5 – INTEGRAIS DE $x \frac{\partial^\eta u^*}{\partial \xi^\eta}$

Este apêndice apresenta as soluções analíticas das integrais do tipo

$$\int_{x_i}^{x_f} x \frac{\partial^\eta u^*}{\partial \xi^\eta} dx, \quad (139)$$

onde $\eta = 0, 1, 2$ ou 3 , que é o grau da derivada parcial de u^* em relação a ξ . A equação de u^* , que depende de ξ e x , foi apresentada em (11) e representada em (116). A seguir são apresentadas as soluções analíticas de (139), para os graus citados.

Para $\eta = 0$ e $\xi \leq x_i$,

$$\int_{x_i}^{x_f} x u^* dx = \frac{1}{4a^5} \exp \left[\frac{-a(x_f - \xi)}{\sqrt{2}} \right] \left\{ \sqrt{2} \operatorname{sen} \left[\frac{a(x_f - \xi)}{\sqrt{2}} \right] - (\sqrt{2} + 2ax_f) \cos \left[\frac{a(x_f - \xi)}{\sqrt{2}} \right] \right\} - \frac{1}{4a^5} \exp \left[\frac{-a(x_i - \xi)}{\sqrt{2}} \right] \left\{ \sqrt{2} \operatorname{sen} \left[\frac{a(x_i - \xi)}{\sqrt{2}} \right] - (\sqrt{2} + 2ax_i) \cos \left[\frac{a(x_i - \xi)}{\sqrt{2}} \right] \right\}. \quad (140)$$

Para $\eta = 0$ e $\xi \geq x_f$,

$$\int_{x_i}^{x_f} x u^* dx = \frac{1}{4a^5} \exp \left[\frac{-a(\xi - x_f)}{\sqrt{2}} \right] \left\{ \sqrt{2} \operatorname{sen} \left[\frac{a(\xi - x_f)}{\sqrt{2}} \right] - (\sqrt{2} - 2ax_f) \cos \left[\frac{a(\xi - x_f)}{\sqrt{2}} \right] \right\} - \frac{1}{4a^5} \exp \left[\frac{-a(\xi - x_i)}{\sqrt{2}} \right] \left\{ \sqrt{2} \operatorname{sen} \left[\frac{a(\xi - x_i)}{\sqrt{2}} \right] - (\sqrt{2} - 2ax_i) \cos \left[\frac{a(\xi - x_i)}{\sqrt{2}} \right] \right\}. \quad (141)$$

Para $\eta = 1$ e $\xi \leq x_i$,

$$\int_{x_i}^{x_f} x u^* dx = -\frac{1}{4a^4} \exp \left[\frac{-a(x_f - \xi)}{\sqrt{2}} \right] \left\{ \sqrt{2} ax_f \operatorname{sen} \left[\frac{a(x_f - \xi)}{\sqrt{2}} \right] + (\sqrt{2} ax_f + 2) \cos \left[\frac{a(x_f - \xi)}{\sqrt{2}} \right] \right\} + \frac{1}{4a^4} \exp \left[\frac{-a(x_i - \xi)}{\sqrt{2}} \right] \left\{ \sqrt{2} ax_i \operatorname{sen} \left[\frac{a(x_i - \xi)}{\sqrt{2}} \right] + (\sqrt{2} ax_i + 2) \cos \left[\frac{a(x_i - \xi)}{\sqrt{2}} \right] \right\}. \quad (142)$$

Para $\eta = 1$ e $\xi \geq x_f$,

$$\int_{x_i}^{x_f} x u^* dx = -\frac{1}{4a^4} \exp \left[\frac{-a(\xi - x_f)}{\sqrt{2}} \right] \left\{ \sqrt{2} ax_f \operatorname{sen} \left[\frac{a(\xi - x_f)}{\sqrt{2}} \right] + (\sqrt{2} ax_f - 2) \cos \left[\frac{a(\xi - x_f)}{\sqrt{2}} \right] \right\} + \frac{1}{4a^4} \exp \left[\frac{-a(\xi - x_i)}{\sqrt{2}} \right] \left\{ \sqrt{2} ax_i \operatorname{sen} \left[\frac{a(\xi - x_i)}{\sqrt{2}} \right] + (\sqrt{2} ax_i - 2) \cos \left[\frac{a(\xi - x_i)}{\sqrt{2}} \right] \right\}. \quad (143)$$

Para $\eta = 2$ e $\xi \leq x_i$,

$$\int_{x_i}^{x_f} x u^* dx = -\frac{1}{4a^3} \exp \left[\frac{-a(x_f - \xi)}{\sqrt{2}} \right] \left\{ \sqrt{2} \cos \left[\frac{a(x_f - \xi)}{\sqrt{2}} \right] + (\sqrt{2} + 2ax_f) \operatorname{sen} \left[\frac{a(x_f - \xi)}{\sqrt{2}} \right] \right\} \\ + \frac{1}{4a^3} \exp \left[\frac{-a(x_i - \xi)}{\sqrt{2}} \right] \left\{ \sqrt{2} \cos \left[\frac{a(x_i - \xi)}{\sqrt{2}} \right] + (\sqrt{2} + 2ax_i) \operatorname{sen} \left[\frac{a(x_i - \xi)}{\sqrt{2}} \right] \right\}. \quad (144)$$

Para $\eta = 2$ e $\xi \geq x_f$,

$$\int_{x_i}^{x_f} x u^* dx = -\frac{1}{4a^3} \exp \left[\frac{-a(\xi - x_f)}{\sqrt{2}} \right] \left\{ \sqrt{2} \cos \left[\frac{a(\xi - x_f)}{\sqrt{2}} \right] + (\sqrt{2} - 2ax_f) \operatorname{sen} \left[\frac{a(\xi - x_f)}{\sqrt{2}} \right] \right\} \\ + \frac{1}{4a^3} \exp \left[\frac{-a(\xi - x_i)}{\sqrt{2}} \right] \left\{ \sqrt{2} \cos \left[\frac{a(\xi - x_i)}{\sqrt{2}} \right] + (\sqrt{2} - 2ax_i) \operatorname{sen} \left[\frac{a(\xi - x_i)}{\sqrt{2}} \right] \right\}. \quad (145)$$

Para $\eta = 3$ e $\xi \leq x_i$,

$$\int_{x_i}^{x_f} x u^* dx = \frac{1}{4a^2} \exp \left[\frac{-a(x_f - \xi)}{\sqrt{2}} \right] \left\{ \sqrt{2} ax_f \cos \left[\frac{a(x_f - \xi)}{\sqrt{2}} \right] - (2 + \sqrt{2} ax_f) \operatorname{sen} \left[\frac{a(x_f - \xi)}{\sqrt{2}} \right] \right\} \\ - \frac{1}{4a^2} \exp \left[\frac{-a(x_i - \xi)}{\sqrt{2}} \right] \left\{ \sqrt{2} ax_i \cos \left[\frac{a(x_i - \xi)}{\sqrt{2}} \right] - (2 + \sqrt{2} ax_i) \operatorname{sen} \left[\frac{a(x_i - \xi)}{\sqrt{2}} \right] \right\}. \quad (146)$$

Para $\eta = 3$ e $\xi \geq x_f$,

$$\int_{x_i}^{x_f} x u^* dx = \frac{1}{4a^2} \exp \left[\frac{-a(\xi - x_f)}{\sqrt{2}} \right] \left\{ \sqrt{2} ax_f \cos \left[\frac{a(\xi - x_f)}{\sqrt{2}} \right] + (2 - \sqrt{2} ax_f) \operatorname{sen} \left[\frac{a(\xi - x_f)}{\sqrt{2}} \right] \right\} \\ - \frac{1}{4a^2} \exp \left[\frac{-a(\xi - x_i)}{\sqrt{2}} \right] \left\{ \sqrt{2} ax_i \cos \left[\frac{a(\xi - x_i)}{\sqrt{2}} \right] + (2 - \sqrt{2} ax_i) \operatorname{sen} \left[\frac{a(\xi - x_i)}{\sqrt{2}} \right] \right\}. \quad (147)$$

APÊNDICE 6 – CÓDIGOS IMPLEMENTADOS

Os códigos implementados, das formulações desenvolvidas para vigas apoiadas sobre base elástica, estão no arquivo digital, que acompanha esta dissertação. Eles foram implementados na linguagem Fortran, utilizando: precisão dupla para as variáveis reais e rotinas do *LAPACK* - *Linear Algebra PACKage*. Os arquivos estão organizados nas seguintes pastas:

- a) Viga-BaseElastica-Analitica: que contém os códigos da solução analítica (estática);
- b) Viga-BaseElastica-MDF: que contém os códigos do Método das Diferenças Finitas para o caso estático;
- c) Viga-BaseElastica-MDF-Tempo-Implicito: que contém os códigos do Método das Diferenças Finitas, com a formulação implícita, para o caso dinâmico;
- d) Viga-BaseElastica-MEC: que contém os códigos do Método dos Elementos de Contorno, MEC, para o caso estático;
- e) Viga-BaseElastica-MECD: que contém os códigos do Método dos Elementos de Contorno com a solução fundamental do caso estático, que origina o MEC-D, utilizados para o caso dinâmico;

Os arquivos contidos nas pastas, com extensão *.f90*, não contém acentos nos nomes e, por isso, o nome das pastas também não contém acentos.